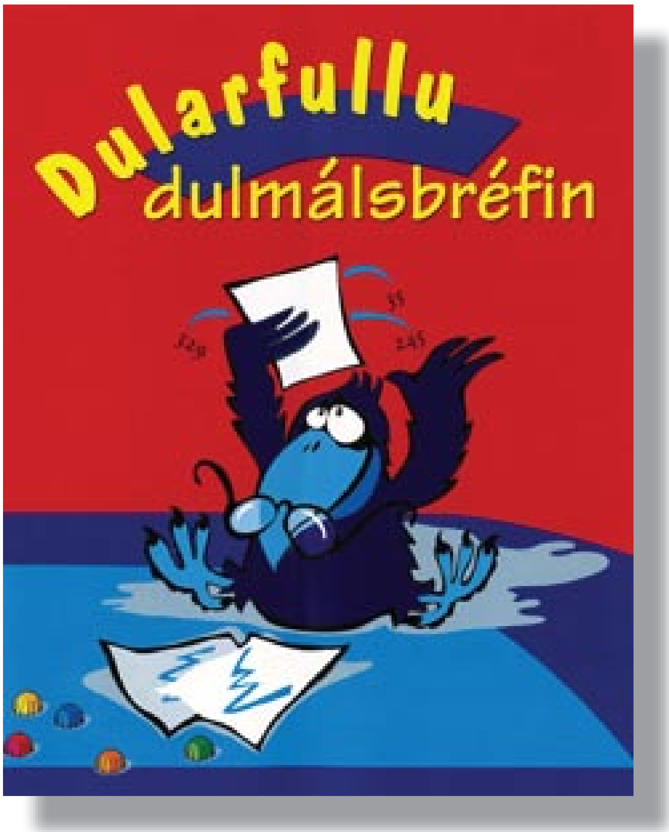
Dularfullu dulmálsbréfin

Kennsluleiðbeiningar



26. ágúst 2008

Efnisyfirlit

Dularfullu dulmálsbréfin – Kennsluleiðbeiningar
Netútgáfa

Ritstjóri: Hafdís Finnbogadóttir

1. útgáfa 2008
Námsgagnastofnun

Umbrot og útlit: Námsgagnastofnun

Inngangur

Dularfullu dulmálsbréfin eru unnin upp úr námsverkefni höfundar í meistaranámi í stærðfræði og kennslufræði við Háskólann í Reykjavík (HR) sem lokið var í ágúst 2007. Upphaflega vaknaði hugmyndin haustið 2005 á námskeiðinu *Kennslufræði stærðfræðinnar* hjá Lisu Evered í HR og byggist efnisinnihaldið mikið á því sem kynnt var á því námskeiði. Unnið var áfram með hugmyndina í námskeiðinu *Námsefnisgerð* undir handleiðslu Ásrúnar Matthíasdóttur lektors við HR og hefur verkefnið síðan verið endurbætt og aukið þar til úr varð þetta þemahefti sem ætlað er fyrir grunnskóla. *Dularfullu dulmálsbréfin* er sjálfstætt þemahefti í stærðfræði og er einkum ætlað nemendum á miðstigi en hentar líka fyrir eldri nemendur.

Við efnisval var *Aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræði* 2007 höfð að leiðarljósi, en þar segir meðal annars á bls. 22:

- Mikilvægt er að tengja efnið merkingarbærum og áhugaverðum verkefnum sem fela í sér athuganir, stærðfræðilega úrvinnslu og túlkun niðurstaðna.
- Æskilegt er að velja viðfangsefni þar sem fléttast saman kunnátta og skilningur á nokkrum efnisþáttum í einu.
- Nemendur ættu að fá að vinna sjálfstætt eða með öðrum við margvíslegar stærðfræðilegar þrautir og athuganir sem höfða til frumkvæðis og sköpunarþarfar.
- Löngun nemenda til að takast á við krefjandi og ögrandi viðfangsefni þarf að vera vakin.
- Nemendur ættu að fá að kynnast skemmtigildi stærðfræðinnar, t.d. í leikjum sem fela í sér stærðfræðilega úrvinnslu og þrautum þar sem reynir á sjálfstæða sköpun og hugkvæmni.

Í þemaheftinu er blandað saman hversdagslegum vandamálum í rekstri sælgætisverksmiðju, margs konar þrautum og dularfullum hótunarbréfum á dulmáli. Reynt er að höfða til áhugasviðs nemenda og þörf þeirra fyrir ævintýri og dulúð, en jafnframt er mikil áhersla lögð á að virkja þá með óhefðbundnum verkefnum. Verkefnin reyna á rökhugsun, innsæi og útsjónarsemi auk talnaskilnings og leikni í meðferð talna. Mörg börn á miðstigi hafa gaman af að velta fyrir sér dulmáli og gefur þetta þema tilefni til fjölbreytilegra stærðfræðilegra viðfangsefna.

Þemaheftið má bæði nota í samfellda þemavinnu í tiltekinn tíma eða draga það fram, t.d. vikulega. Segja má að hver opna í verkefnaheftinu sé sjálfstæð eining og því er líka hægt að velja einungis úr þau verkefni sem nemendur og kennari telja áhugaverð.

Æskilegt er að nemendur vinni saman að lausn verkefnanna í heftinu því nauðsynlegt er að geta rætt þau við aðra og geta skipst á skoðunum. Þannig kynnast nemendur mismunandi lausnaleiðum og læra að útskýra sínar eigin. Við lausn verkefnanna reynir á marga þá þætti sem fjallað er um í kaflanum um miðstig í *Aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræði*.

Markmið

Markmiðið með þessu þemahefti er fyrst og fremst að reyna að auka fjölbreytni í stærðfræðikennslunni með stærðfræðitengdum verkefnum, í þeirri von að auka virkni nemenda í kennslustundunum og opna augu þeirra fyrir því hve stærðfræði getur verið skemmtileg. Að öðru leyti eru markmiðin þessi:

- Að nemendur kynnist því að stærðfræði er að finna alls staðar í umhverfinu og þeir fái að glíma við fjölbreytileg stærðfræðileg viðfangsefni úr daglegu lífi.
- Að skapa nemendum möguleika til að dýpka skilning sinn í stærðfræði og hvetja þá til að beita þekkingu sinni, færni og stærðfræðilegri hæfni.
- Að nemendur öðlist sjálfstraust til að reyna á eigin spýtur að skilja stærðfræðileg hugtök og leysa stærðfræðileg verkefni.
- Að nemendur þjálfist í rökhugsun, ekki síður en í útreikningum, og öðlist færni í að skýra lausnaleiðir sínar fyrir öðrum.
- Að nemendur vinni upplýsingar úr texta og nýti sér vísbendingar til að komast að rökréttri niðurstöðu við lausn verkefna þar sem lausnaleiðir eru ekki augljósar fyrir fram.

Að geta fylgt fyrirmælum og sett sig inn í ný og áður óþekkt viðfangsefni og leyst flókin verkefni er mjög mikilvægt í samfélagi sem breytist ört frá degi til dags. Stærðfræðin gegnir hér lykilhlutverki og henni þurfa nemendur að geta beitt í sínu daglega lífi og starfi, sem og flestum öðrum námsgreinum.

Kennsluleiðbeiningar og lausnir

Á fyrstu þremur blaðsíðunum í þemaheftinu er verið að kynna sögusviðið og framleiðsluna í sælgætisverksmiðjunni. Það getur verið gaman, ef hægt er að koma því við, að gefa hverjum nemanda pakka með ávaxtakúlum sem þeir geta talið. Þetta er hins vegar ekki nauðsynlegt því í fyrsta dæminu eru gefnar upplýsingar um fjölda stykkja úr 20 pökkum og síðar koma fram frekari upplýsingar um framleiðsluna. Það er hins vegar viss stemming og eykur virkni nemenda að hafa eigin pakka og geta handfjatlað molana.

Í þemaheftinu eru tekin dæmi um fjölbreytta útreikninga í kringum sælgætispakkana en slík framleiðsla býður upp á margs konar stærðfræðilegar vangaveltur og útreikninga, til dæmis meðaltals-, hlutfalls- og líkindareikninga. Auk þess er tilvalið að ræða áætlanagerð og innkaup hráefnis við nemendur og hvernig gæðaeftirliti með framleiðslunni gæti verið háttað.

Á blaðsíðum 5, 8, 9, 12 og 13 kynnast nemendur mismunandi dulmálskerfum og þurfa að beita mismunandi aðferðum við að lesa úr dulmálsbréfum. Kenna þarf notkun á dulmálslyklinum sem kynntur er á blaðsíðu 8 og eru kennsluleiðbeiningar fyrir viðkomandi blaðsíðu hér á eftir.

Á blaðsíðum 15 og 16 þurfa söguhetjurnar að ganga í gegnum nokkra eldskírn þar sem þær þurfa að leysa safn þrauta á 80 mínútum. Það má hugsa sér að leggja efnið einnig þannig upp fyrir nemendur eða nota þessi viðfangsefni sem lið í námsmati.

Þemaheftinu fylgja dulmálslyklar og fleiri eyðublöð og kemur það fram í kennsluleiðbeiningum fyrir hverja blaðsíðu hér á eftir hvaða eyðublöðum og kennslugögnum þyrfti að dreifa til nemenda hverju sinni. Að auki eru lausnir á velflestum þrautunum í þemaheftinu. Leggja þarf áherslu á það við nemendur að engin ein lausnaraðferð er rétt og að hver sú aðferð sem leiðir til réttrar niðurstöðu er jafngild og hver önnur. Gott er að vera með sérstakt vinnuhefti þar sem verkefnum tengdum þemaheftinu er safnað saman.

Bls. 1 Verksmiðjan

Kennslugögn: Ef nemendur fá eigin sælgætispakka til að telja stykkin úr þurfa þeir ekki að nota töfluna á blaðsíðunni heldur safna saman upplýsingunum úr bekknum og búa til sín eigin gögn. Athugið að sælgætismolarnir eru notaðir áfram og því má ekki borða þá strax!

1. Þar sem fjöldi stykkja er misjafn í pökkunum hlýtur að vera vigtað í pakkana.

2. Snúa þarf teningunum í huganum og nota myndrænt innsæi til að átta sig á að þriðji teningur frá vinstri er frábrugðinn hinum. Fyrsti og annar teningur frá vinstri geta verið eins og líka fyrsti og fjórði. Gott getur verið að nota teninga sér til hjálpar. Ef notaður er venjulegur teningur má líma miða með táknunum á hliðarnar.

3. Hér þarf að athuga forgangsröð aðgerða. Til að fá sem hæsta tölu þarf að setja 8 og 6 í tugasætin. Fimm sinnum áttatíu er stærra en fimm sinnum sextíu og þess vegna er 5 sett í einingasætið hjá sexunni og 4 í einingasætið hjá áttunni. Svarið er þá

$$\boxed{8}\,\boxed{4} \cdot \boxed{6}\,\boxed{5} + \boxed{3} \cdot \boxed{1} = 5463$$

Bls. 2–3 Framleiðslan

Kennslugögn: Hér er annaðhvort stuðst við gögnin sem gefin eru í töflunum á bls. 1 og 3 eða gögn sem nemendur safna saman við talningu á stykkjafjölda úr eigin pökkum.

Mikilvægt er að nemendur geri sér ljóst að því fleiri pakkar sem eru skoðaðir þeim mun nær er hægt að komast réttri niðurstöðu um meðaltal.

Lausnirnar hér á eftir miðast við upplýsingar úr töflunum á bls. 1 og 3

1.
   - Meðaltalið er 28.
   - Miðgildið er líka 28.
   - Tíðasta gildið er 27.
   - Lægsta gildið er 23 en það hæsta 36.
   - Mesta frávik frá meðaltali er þá 8.

2. Reiknað meðaltal úr 5 pökkum er 28. Það þýðir að líta má svo á að stykkjafjöld-inn í pökkunum hafi verið jafnaður þannig að hver pakki innihaldi 28 stykki. Tveir pakkar innihéldu 28 stykki hvor, en í einum pakka voru 5 undir meðaltali og í öðrum 3 undir meðaltali. Fimmti pakkinn hlýtur þá að hafa innihaldið sam-tals 8 yfir meðaltali, það eru 36 stykki.
   Þetta má einnig reikna á eftirfarandi hátt: $5 \cdot 28 = 140$.
   Og síðan $140 - 28 - 28 - 25 - 23 = 36$

3.
   - Meðaltal · 500, þ.e. $28 \cdot 500 = 14\,000$ stykki
   - $\frac{700}{\text{Meðaltal}}$, þ.e. $\frac{700}{28} = 25$ pakkar
   - $\frac{2800}{\text{Meðaltal}}$, þ.e. $\frac{2800}{28} = 100$ pakkar

4. Svigrúm þarf að vera til að mæta skyndilegri söluaukningu og því má ekki áætla í blindni út frá meðaltalinu. Meðaltalið ætti einungis að vera viðmið og getur verið ágætt sem slíkt en hafa þarf í huga að vandkvæði geta skapast ef framleiðslan er meiri á einum tíma en öðrum og þá gæti annaðhvort vantað hráefni eða alltof mikið verið pantað.

5. Það tekur tólf sekúndur að fylla á einn pakka. Á einni mínútu er þá fyllt á 5 pakka og 300 pakka á einni klukkustund. Það tekur þá 4 klukkustundir að fylla á 1200 pakka.

6. Á einni klukkustund er fyllt á 300 pakka. Það eru $\frac{300}{12} = 25$ dúsín.

   Ef afköstin eru aukin um 20% er fyllt á 20% fleiri dúsín en áður. 10% af 300 eru 30 pakkar og 10% af 25 dúsínum er $2\frac{1}{2}$ dúsín. Tuttugu prósentum meira eru þá 360 pakkar eða 30 dúsín.

7. Eitt gross eru 12 tylftir, eða $12 \cdot 12 = 144$ pakkar. Fimm gross eru 720 pakkar. Fyllt er á 300 pakka á klukkustund og 600 pakka á tveimur tímum. Þá eru 120 pakkar eftir. Á einni mínútu er fyllt á 5 pakka. Það tekur þá 24 mínútur að fylla á 120 pakka og í allt verða þetta 2 klukkustundir og 24 mínútur.

8. Af 27 stykkjum sem eru í pakkanum eru 9 rauð. Hlutfallið er því $\frac{9}{27}$ eða $\frac{1}{3}$.
   Bláu stykkin eru $\frac{8}{27}$ og grænu stykkin eru $\frac{10}{27}$.
   Þegar 3 rauð stykki hafa verið borðuð eru bara 6 rauð stykki eftir í pakkanum og heildarfjöldinn er kominn niður í 24 stykki. Rauðu stykkin eru þá í hlutfallinu $\frac{6}{24}$ eða $\frac{1}{4}$, bláu stykkin eru $\frac{8}{24}$ eða $\frac{1}{3}$ og grænu stykkin eru $\frac{10}{24}$ eða $\frac{5}{12}$.

9. Í hverjum pakka er nammi í þremur litum. Gera þarf ráð fyrir hámarksóheppni sem þýðir að þegar valin hafa verið 6 stykki þá eru 2 stykki í hverjum lit. Sjöunda stykkið hlýtur að verða það þriðja í einhverjum litnum, þannig að ef valin eru sjö stykki í einu eru örugglega að minnsta kosti 3 stykki í sama lit.

10. Af 27 stykkjum sem eru í pakkanum eru 9 rauð. Hlutfallið er því $\frac{9}{27}$ eða $\frac{1}{3}$.
    Líkur á að fá rautt stykki eru þá 1 á móti 3, eða 33%.

11–12. Þó að nemendur séu ekki með eigin pakka er mjög gott að gera hér tilraun þar sem til dæmis kubbar eru notaðir til að tákna stykkin í pakkanum. Fjöldi þeirra og litasamsetning er í töflunni efst á blaðsíðunni. Mikilvægt er að nemendur geri sér grein fyrir að því oftar sem leikurinn er endurtekinn því meir nálgast niðurstöðurnar fræðilegu líkurnar sem reiknaðar voru út í dæmi 10.

13. Þegar rauðu stykkin hafa verið kláruð eru 18 stykki eftir í pakkanum og 8 þeirra eru blá. Líkur á að fá blátt stykki næst eru þá $\frac{8}{18}$ eða $\frac{4}{9}$, sem er rúm 44%.

14. Hér þarf aftur að reikna með hámarksóheppni. Það er mögulegt að fá einungis blá og græn stykki, þannig að velja þarf 3 stykki umfram samanlagðan fjölda af grænum og bláum stykkjum. Það verður því að velja 21 stykki í einu.

Bls. 4–5 Þrautir og dulmál

Kennslugögn: Með blaðsíðu 5 mætti til hægðarauka prenta út eyðublað 1 handa nemendum, með bæði dulmálslyklinum og hótunarbréfinu, sem þeir geta skrifað inn á.

1. Þríhyrningarnir eru 37 talsins.

2. Það fyrsta sem vekur athygli er að þó að 5 stafa talan sé margfölduð með fjórum þá er útkoman ennþá 5 stafa tala. Það þýðir að T verður að vera 1 eða 2. Fjórum sinnum Ó er þá augljóslega tveggja stafa tala, sem endar á T. Það þýðir að T er örugglega 2 því fjórum sinnum einhver tala getur ekki endað á 1. Bókstafurinn Ó verður því að vera talan 8. Það að T er 2 og Ó er 8 í byrjun talnanna þýðir að ekkert hefur verið "geymt" fyrir síðustu margföldunaraðgerðina og að S hlýtur því að vera 0 eða 1. Ef prófað er með S jafnt og 0 sést að það gengur ekki upp, því fjórum sinnum L plús 3 sem voru „geymdir" getur aldrei endað á 0 og S hlýtur því að vera 1. Bókstafurinn L getur ekki verið 2 því vitað er að T er 2. Því hlýtur L að vera 7 og Æ að vera 9. Talan ÓLÆST er því 87912.

3. Tannhjólin krækjast eitt og eitt saman.
   - Í tannhjóli A eru 8 fleiri tennur en í tannhjóli B, sem hefur 16 tennur. Átta er helmingurinn af 16 þannig að tannhjól B fer einn og hálfan hring á meðan tannhjól A fer einn hring.
   - Tannhjól B fer $1\frac{1}{2}$ hring á meðan A fer 1 hring, 3 hringi á meðan A fer 2 hringi og svo framvegis. Tannhjól A fer því 10 hringi á meðan tannhjól B fer 15 hringi.

4. Það sést strax að í þriðju röðinni raðast tölurnar 3, 2, 1 og 0 því annars væru komnir tveir 1 og tveir 2 í dálkana. Í skálínunni niður til hægri koma tölurnar í röðinni 0, 3, 1 og 2 því ekki mega vera tveir 3 í síðasta dálkinum. Þá sést að X verður að vera 3 því 3 mega ekki vera tvisvar í annarri röð.

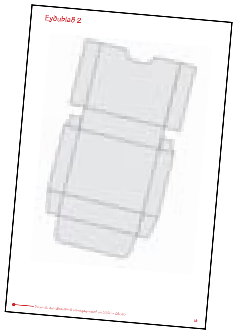
0	1	2	3
	3		
3	2	1	0
		X	2

5. Þegar hótunarbréfið er skoðað með tilliti til dulmálslykilsins kemur í ljós að hver bókstafur í stafrófinu er táknaður með tveimur tölustöfum. Fyrri tölustafurinn er númer dálksins og seinni tölustafurinn er númer raðarinnar þar sem bókstafurinn stendur. Nemendur ættu sjálfir að geta fundið út úr þessu með því að skoða skilaboðin og dulmálslykilinn. Við kennslu mætti undirstrika tenginguna við hnitakerfið, því hver stafur er táknaður eins og punktur í hnitakerfi, með x-hnit og y-hnit.

6. Skilaboðin eru: Nammi er óhollt! Hættið að framleiða það!

7. 16 44 44 12 15 53 45 13 12 12 14 55 23 35 65

8. Auðvelt er að búa til sitt eigið dulmál einfaldlega með því að rugla stöfunum í dulmálslyklinum.



Bls. 6–7 Umbúðir

Kennslugögn: Með blaðsíðu 7 þarf hver nemandi/hópur að nota eyðublað 2 með mynd af útflöttum nammipakka, en einnig gætu nemendur útbúið skapalón af pakkanum eða notað raunverulegan pakka sem hefur verið tekinn í sundur. Enn fremur þarf hver nemandi/hópur að fá lítinn skammt af ósoðnum hrísgrjónum.

1. Í einfaldri uppskrift eru 3 dl af rjóma, sem gefa af sér 24 karamellur. Úr 1 dl fást þá $\frac{24}{3}$ = 8 karamellur. Í einum lítra eru 10 dl og þess vegna fást 80 karamellur úr einum lítra af rjóma.

2. Tvöföld uppskrift gefur 48 karamellur. Þreföld gefur 72 karamellur og fjórföld gefur 96 karamellur. Þess vegna þarf að fjórfalda uppskriftina.

3. Gott er að hugsa sér einhverja þægilega tölu til að vinna með þannig að hægt sé að skipta karamellunum jafnt á milli vinanna. Ef vinurinn fékk til dæmis 8 karamellur þá fékk forstjórinn 50% meira eða 4 karamellum meira sem gerir 12 karamellur. Forstjórinn þurfti þá að gefa frá sér 2 karamellur til að báðir ættu jafnmargar. Hann þurfti því að gefa tvo tólftu hluta eða $\frac{2}{12}$ sem er jafnt og $\frac{1}{6}$ eða einn sjötti hluti.

4. Í þessarri þraut er ekki vitað hve margar karamellur voru til skiptanna. Því þarf að þreifa sig áfram. Finna skal tölu sem bæði 3 og 5 ganga upp í þannig að auðveldlega sé hægt að finna $\frac{1}{5}$ part og $\frac{1}{3}$ part. Talan 15 hefur þessa eiginleika. Ef fimmtán karamellur voru til skiptanna þá fékk vinurinn $\frac{1}{5}$ eða 3 karamellur og systirin $\frac{1}{3}$ eða 5 karamellur og forstjórinn restina sem er 7 karamellur. Það má þó sjá að hér munar ekki nema tveimur karamellum á eign systurinnar og vinarins en það á að muna fjórum. Ef magnið af karamellum er þá tvöfaldað og reiknað er með 30 stykkjum, þá fær vinurinn $\frac{1}{5}$ sem er 6 karamellur og systirin fær $\frac{1}{3}$ sem er 10 karamellur. Hér munar fjórum karamellum eins og gefið er í þrautinni og forstjórinn fær þá rest sem er 14 karamellur.

5. Reiknað er með 52 vikum í einu ári, hálft ár er því 26 vikur. Einfaldast er líklega að hækka töluna um 2 fyrir hvern laugardag og leggja síðan allar tölurnar saman, það er að segja 1 + 3 + 5 + 7 o.s.frv. Ef niðurstöðurnar eru settar í töflu koma skemmtileg tengsl í ljós.

Vika	Borðaðar karamellur	Fjöldi karamella frá upphafi	Í ljós kemur
1	1	1	$1^2 = 1$
2	3	4	$2^2 = 4$
3	5	9	$3^2 = 9$
4	7	16	$4^2 = 16$

Niðurstaðan er að innbyrtar hafa verið 676 karamellur enda er $26^2 = 676$.

6. Það virðist ekki árennilegt að áætla flatarmál með því að telja hrísgrjón. Svona verkefni hafa þó þann kost að þau eru eftirminnileg og skemmtileg fyrir utan að geta aukið skilning, þannig að ef vel tekst til á sér stað nám til framtíðar. Benda má á aðra leið til að áætla flatarmál, en þá er notaður umbúðapappír af þekktri stærð sem er svolítið vatnsfráhrindandi. Teiknað er inn á pappírinn það

flatarmál sem þarf að áætla og síðan er notaður næsti rigningardagur til að hlaupa út og safna regndropum á pappírinn. Regndroparnir eru síðan taldir líkt og hrísgrjónin og flatarmálið áætlað.

- Flatarmál = lengd · breidd. Flatarmál A4-blaðs er 623,7 cm^2
- Flatarmál á pakka = hlutfall grjóna á pakka · flatarmál A4-blaðs.

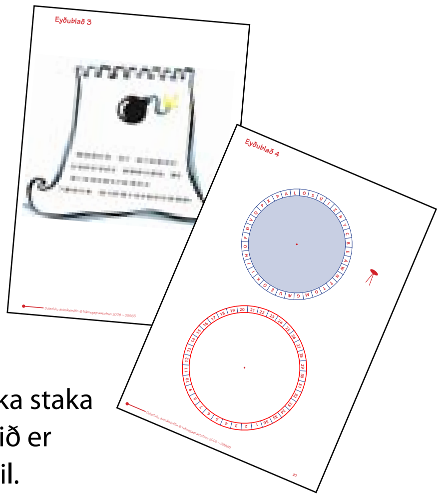
7. Rúmmál = breidd · hæð · dýpt. Rúmmálið er 37,125 cm^3.

8. Askjan samanstendur af 5 eins ferningum þannig að allar hliðar öskjunnar, sem eru 12 talsins, eru jafnlangar. Ummálið er 108 cm þannig að hver hlið er $\frac{108}{12} = 9$ cm.

   Flatarmál hvers fernings er þá $9 \cdot 9 = 81$ cm^2 og fimm slíkir ferningar gefa heildarflatarmálið $5 \cdot 81 = 405$ cm^2.

9. Askjan er 9 cm á breidd og þess vegna komast tveir pakkar hlið við hlið í hana. Að dýpt er hún líka 9 cm og vegna þess að 1,5 cm · 6 = 9 cm þá komast 6 pakkar í hvora röð á dýptina. Í botninum á öskjunni eru því 12 pakkar. Hæð öskjunnar er líka 9 cm og ef pakkarnir eru minnkaðir í 4,5 cm á hæð komast tvö lög af pökkum í öskjuna, eða 24 pakkar í allt.

Bls. 8–9 Lausnarorð



Kennslugögn: Hver nemandi þarf að fá eyðublað 4 með viðeigandi dulmálslykli, skæri til að klippa skífurnar út og splitti til að halda þeim saman. Best er að ljósrita þetta eyðublað á nokkuð þykkan pappír því þá er auðveldara að nota skífurnar.

Einnig er gott að ljósrita eyðublað 3 með hótunarbréfinu sem nemendur geta skrifað inn á.

1. Í orðsendingunni er ekki bara um talnapör að ræða heldur líka staka tölustafi sem táknað gætu hvern bókstaf. Þegar hótunarbréfið er skoðað sést því strax að ekki er unnt að nota fyrri dulmálslykil.

   Dulmálslykillinn sem nú þarf að nota samanstendur af tveimur skífum sem eru festar saman í miðjunni þannig að hægt er að snúa þeim að vild. Notendur þurfa að koma sér saman um ákveðið lausnarorð sem nota skal og geta þá mismunandi tölustafir táknað einn og sama bókstafinn. Þetta veldur því að einungis öflugar tölvur geta ráðið svona dulmál án lausnarorðsins og má geta þess að dulmál Þjóðverja í seinni heimsstyrjöldinni var byggt á svipuðum grunni.

   Til að skilja hvernig dulmálslykillinn virkar er best að taka dæmi. Ef lausnarorðið er FJÖR og setja þarf setninguna „*Við viljum sykur*“ yfir á dulmál, þá er aðferðin eftirfarandi: Skífurnar eru stilltar þannig að fyrsti stafurinn í lausnarorðinu F er látinn standast á við töluna 1 á ytri skífunni og síðan lesin af skífunni sú tala sem stenst á við V, fyrsta stafinn í orðsendingunni. Í þessu tilfelli er V = 3. Skífunum er snúið og næsti stafur í lausnarorðinu J er látinn standast á við töluna 1 og af skífunni lesin sú tala sem stenst á við I, sem er næsti stafur í orðsendingunni. Í þessu tilfelli er I = 36. Næst er Ö stillt á 1 og þá fæst að Ð = 29 og loks er R stillt á 1og þá sést að fjórði stafurinn í orðsendingunni er í þessu tilfelli V = 25. Þegar kemur að því að finna hvað stendur fyrir fimmta stafinn þá þarf að byrja aftur á fyrsta stafnum í lausnarorðinu og F er stillt á 1 og þá fæst að I = 33 og svona koll af kolli. Í heild verður orðsendingin á þessa leið:

3 36 29 25 33 12 25 15 26 14 7 18 29 18

Takið eftir að í þessari stuttu orðsendingu hefur V bæði verið táknað sem 3 og 25 og sama má segja um I sem táknað hefur verið með 36 og 33. Á sama hátt táknar 25 bæði V og J í orðinu *viljum* og 18 táknar bæði K og R í orðinu *sykur*. Þetta er einmitt ástæðan fyrir því að það er nauðsynlegt að nota lausnarorð til að ráða svona dulmál.

2. Þetta er gott samvinnuverkefni þar sem tveir eða fleiri vinna saman. Nemendur ættu að gera sér ljóst að það er hægt að spara sér mikla vinnu við skífusnúninga. Ef lausnarorðið er til dæmis FJÖR má stilla hjólið í upphafi á F = 1, strika undir fjórða hvern staf í orðsendingunni og lesa síðan af skífunni fyrir þá alla í einu. Með þessu móti er unnt að komast af með að stilla skífurnar fjórum sinnum, vegna þess að lausnarorðið er fjórir stafir í þessu tilfelli.

3. Notkun dulmáls á stríðstímum er vel þekkt, en það er einnig oft notað til að vernda viðskipta- og iðnaðarleyndarmál. Rafræn boð eins og gagnasendingar á milli tölva eru sömuleiðis oft á dulmáli.

4. Því torleystara sem dulmál er því betra, en það verður líka að vera auðvelt í notkun. Best er að sem fæstir kunni dulmálslykilinn eða lausnarorðið og líka er gott að skipta um lausnarorð reglulega því mikilvægar upplýsingar eiga það til að leka út.

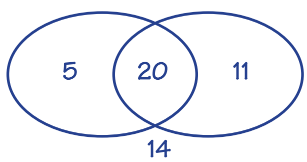
5. Ekki er víst að allir nemendur átti sig á tengingunni við ártalið efst á miðanum sem skrifað er með rómverskum tölum. En þegar þeir hafa tengt lausnarorðið við rómversku tölurnar ætti lausnin ekki að vera langt undan því auðvelt er að sjá að 5 = V, 50 = L og 500 = D og lausnarorðið því VALD.

6. Skilaboðin eru:
Okkur er alvara! Útrýmum offitu og tannskemmdum!
Lokið verksmiðjunni!

7. Verðið í mars er hækkað um 20% og fer því úr 100 kr. í 120 kr. Í maí er ákveðið að lækka aftur um 20%. Tíu prósent af 120 eru 12 kr. og því er heildarlækkunin 24 kr., eða úr 120 kr. niður í 96 kr. sem er verðið í maí. Verðbreytingin frá því í mars er því ekki hækkun, heldur lækkun um 4%.

8. Einn pakki kostaði áður 100 kr. og því þurfti $36 \cdot 100 = 3600$ kr. til að kaupa 36 pakka. Þegar pakkinn hafði verið hækkaður um 20% var verðið komið upp í 120 kr. og þá fengust aðeins $\frac{3600}{120} = 30$ pakkar fyrir sama pening og hægt var að kaupa 36 pakka fyrir áður.

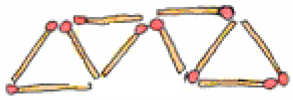
9. Hér er best að nota mengjamynd við lausn verkefnisins. Í sammenginu lenda þeir krakkar sem eru hrifnir af hvoru tveggja og tilheyra því báðum hópum. Fimm í viðbót við þessa tuttugu eru hrifnir af ávaxtakúlum og ellefu að auki eru hrifnir af saltpillum eða 36 krakkar í allt. Fimmtíu krakkar voru spurðir og það eru þá 50 – 36 = 14 krakkar sem vilja hvorugt.



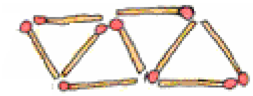
Bls. 10–11 Þrautir

Kennslugögn: Hver nemandi/hópur þarf að fá 20 eldspýtur, tannstöngla eða eitthvað álíka.

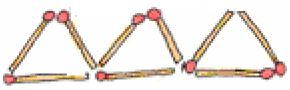
1. Ein eldspýta fjarlægð



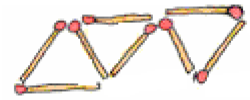
Tvær eldspýtur fjarlægðar



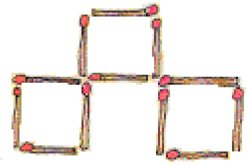
Tvær eldspýtur fjarlægðar



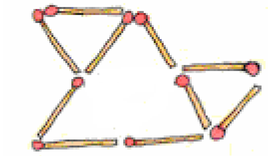
Þrjár eldspýtur fjarlægðar



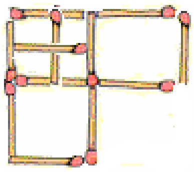
2. Þrír ferningar



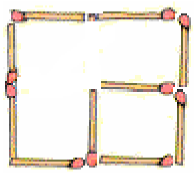
3. Þrír þríhyrningar



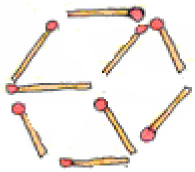
4. Sjö ferningar



Tveir ferningar



5. Þrír samsíðungar



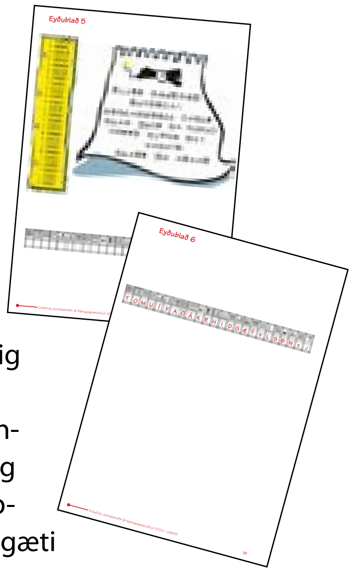
6. Við þrautir af þessu tagi er nauðsynlegt að rekja sig til baka frá útkomunni. Síðast var 14 bætt við þannig að talan sem var á undan 50 hlýtur að hafa verið 36. Þar áður var einhver tala hafin í annað veldi og fyrst hún endaði í 36 hlýtur talan að hafa verið 6 því $6 \cdot 6 = 36$. Einu skrefi framar var einhver tala margfölduð með $\frac{1}{5}$ en það jafngildir því að deilt hafi verið í töluna með fimm. Fyrst talan endaði í 6 hlýtur hún að hafa verið 30. Enn einu skrefi framar voru 14 dregnir frá, þannig að sú tala hlýtur að hafa verið 44. Að lokum er vitað að upphafstalan margfölduð með 0,5 gaf töluna 44 og fyrst það jafngildir því að deilt hafi verið í upphafstöluna með tveimur þá er ljóst að hún hlýtur að hafa verið 88.

7. Fimm tunnur eru notaðar á dag og birgðir endast í 20 daga. Þá hljóta að vera til $5 \cdot 20 = 100$ tunnur. Birgðirnar eiga að endast í 25 daga og þá má eyða $\frac{100}{25} = 4$ tunnum á dag.

8. Heildarferðalagið var $150 + 175 = 325$ km. Kostnaðurinn fyrstu 150 km var 10 kr. fyrir hvern kílómetra eða $150 \cdot 10 = 1500$ kr. Kostnaðurinn fyrir seinni 175 km var 23 kr. á kílómetra eða $175 \cdot 23 = 4025$ kr. Heildarkostnaður fyrir ferðalagið var því 5525 kr. og ef því er deilt jafnt niður á 325 kílómetra þá fæst $\frac{5525}{325} = 17$ kr. á hvern kílómetra sem er þá meðalkostnaður fyrir hvern kílómetra þann daginn.

9. Snigillinn er á ferðalagi sem búið er að skipta upp í 15 parta. Ferðalagið er eftir jafnarma fimmhyrningi sem þýðir að hver hlið hlýtur að vera 3 partar. Þegar snigillinn hefur lokið við hlið E er hann búinn með $\frac{3}{15}$ af ferðinni, hann er búinn með $\frac{6}{15}$ þegar hlið D er lokið í viðbót og $\frac{9}{15}$ þegar hlið C er einnig að baki. Snigillinn hlýtur því að vera staddur á hlið B þegar hann hefur lagt $\frac{11}{15}$ ferðarinnar að baki.

10. Hver hlið er 9 cm og snigillinn skríður hálfan cm á mínútu. Hann er því 18 mínútur með hverja hlið blómapottsins og þar sem hliðarnar eru fimm fæst heildartíminn fyrir ferðalagið $5 \cdot 18 = 90$ mínútur eða $1\frac{1}{2}$ klukkustund.



Bls. 12–13 Tíðnitafla

Kennslugögn: Það getur verið gott að ljósrita eyðublað 5 með þriðja hótunarbréfinu en þar er líka tafla yfir táknin og tíðnitafla íslenska stafrófsins sem nemendur þurfa að nota en hún er einnig í bókinni. Ef ekkert gengur að finna lausnina er dulmálslykillinn á eyðublaði 6 og mætti afhenda hann þeim nemendum sem eru að gefast upp í leit sinni að lausn.

1. Í þriðja og síðasta dulmálsbréfinu koma ekki fyrir neinar tölur þannig að augljóslega eru gömlu dulmálslyklarnir ónothæfir. Við skoðun virðist sem eitthvert óþekkt tákn standi fyrir hvern bókstaf. Uppsetning bréfsins getur gefið mikilvægar upplýsingar, s.s. ávarp, kveðja og undirskrift, en í þessu tilfelli sést að bréfinu lýkur ekki með upphrópunarmerki eins og hinum fyrri og virðist fremur sem um undirritun gæti verið að ræða.

   - Gagnlegt getur verið að rifja upp smáorð viðkomandi tungumáls og skoða dulmálstextann sérstaklega með tilliti til þeirra. Í íslensku máli eru nokkuð mörg tveggja stafa orð svo sem: og, af, er, ef, að, en, ég, þú, þó o.fl.

2. Yfirleitt er frekar auðvelt að ráða dulmál af þessari gerð þar sem eitthvert óþekkt tákn stendur fyrir hvern bókstaf. Koma þar rannsóknir á tíðni einstakra bókstafa í texta skrifuðum á viðkomandi tungumáli að góðum notum. Niðurstöðurnar eru settar fram í tíðnitöflu fyrir viðkomandi stafróf í líkingu við þessa sem hér er notuð. Aðferðin felst síðan í því að athuga hversu oft dulmálstáknin koma fyrir í orðsendingunni og bera niðurstöður saman við tíðnitöflu viðkomandi stafrófs eða tungumáls.

- Ef bréfið er ekki á íslensku þarf að hafa tíðnitöflu sem gildir fyrir viðkomandi tungumál. Þetta er hægt að ræða í bekknum en í þessu tilviki er eðlilegast að ganga út frá því að bréfið sé á íslensku eins og fyrri bréfin.

3. Samkvæmt tíðnitöflunni er A algengast og Ý óalgengast.

4. Fimm algengustu stafirnir eru: a, n, r, i og e. Úr þeim má til dæmis mynda nöfnin Ernir, Anna, Eir, Arna, Einar, Ari, Nanna og Arnar. Ef S og T bætast við má nefna til dæmis nöfnin Steinar og Sara.

5. Hér koma mörg svör til greina, það gæti t.d. verið nafnið Huld.

6. Vitað er að verksmiðjan er milli 50 og 80 ára gömul og því er best að byrja á því að rifja upp 8 sinnum töfluna á því talnabili. Þá fæst að $7 \cdot 8 = 56$, $8 \cdot 8 = 64$ og $9 \cdot 8 = 72$. Tölurnar á þessu bili sem gefa afganginn einn ef deilt er í þær með átta eru þess vegna einum hærri en þessar, það er að segja tölurnar 57, 65 og 73. Ef deilt er í þessar tölur með 3 verður afgangurinn 0 þegar deilt er í 57, afgangurinn 2 þegar deilt er í 65 og afgangurinn 1 þegar deilt er í 73. Verksmiðjan er því 73 ára gömul.

7. Heill hringur á klukkunni er 360 gráður og jafnframt 12 klukkustundir. Það bil sem spannar eina klukkustund á skífunni er því $\frac{360}{12} = 30$ gráður. Þegar klukkan er tuttugu mínútur yfir þrjú bendir stóri vísirinn á fjóra en litli vísirinn hefur mjakast eilítið í áttina að fjórum, nánar tiltekið $\frac{1}{3}$ part leiðarinnar vegna þess að tuttugu mínútur eru $\frac{1}{3}$ partur úr klukkustund. Þriðjungur af 30 gráðum eru 10 gráður og þess vegna eru 20 gráður á milli vísanna þegar klukkan stoppar.

8. Orðsendingin er svo stutt að ekki hefur verið þörf fyrir alla íslensku stafina í henni.

9. · 11, · 9, · 7, · 6, · 6, · 5, · 5 og · 5.

Þegar 8 algengustu táknin eru borin saman við 8 algengustu bókstafina í stafrófinu fæst að

gæti staðið fyrir A

gæti staðið fyrir N

gæti staðið fyrir R

og gætu staðið fyrir E og I eða öfugt

, og gætu svo staðið fyrir S, T og Ð, þó röðin þurfi ekki að vera þessi.

10. Skilaboðin eru:

Allra síðasta aðvörun!
Steinhættið undir eins áður en miklu verra hlýst af!
Kveðja
Einar og Nanna

11. Skilaboðin eru samtals 80 stafir. Hlutfallsleg tíðni fyrir er $\frac{11}{80} = 0{,}1375$; fyrir er hún $\frac{9}{80} = 0{,}1125$ og fyrir er hún $\frac{7}{80} = 0{,}0875$.

- Borið saman við hlutfallslega tíðni þriggja algengustu stafanna í tíðnitöflunni kemur í ljós að tölurnar sem fást úr hótunarbréfinu eru umtalsvert hærri. Við því mátti líka búast því eins og komið hefur fram er orðsendingin það stutt að ekki eru allir stafir íslenska stafrófsins nýttir í henni og hlutfallsleg tíðni táknanna því ekki fyllilega sambærileg.

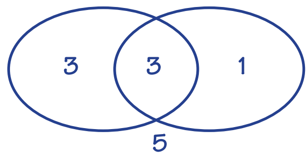
12. Að nota allt íslenska stafrófið í svona stuttri orðsendingu er líklega ógerlegt, en með mikilli yfirlegu er hugsanlega hægt að láta orðsendinguna passa betur við tíðnitöfluna.

Bls. 14–15 Á vinnustaðnum

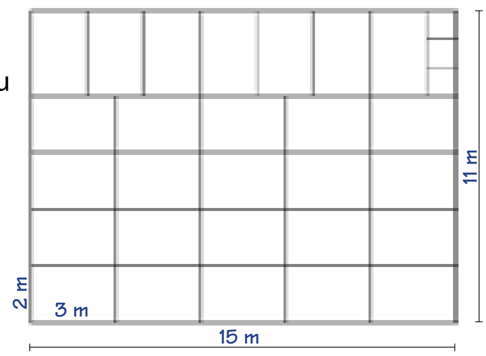
Kennslugögn: Engin sérstök.

1. Flatarmál skrautgarðsins er 25 m · 50 m = 1250 m^2. Flatarmál skrautgarðsins að meðtaldri gangstéttinni er 30 m · 55 m = 1650 m^2, vegna þess að við lengd og breidd bætast 2,5 metrar sitt hvorum megin, vegna gangstéttarinnar. Gangstéttin sjálf hlýtur því að vera 1650 – 1250 = 400 m^2.

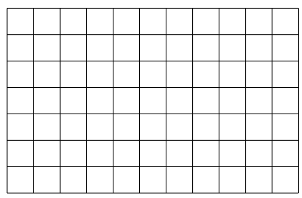
2. Hér er gott að nota mengjamynd. Í sammenginu lenda þrír starfsmenn sem eru bæði í sokkum og inniskóm og tilheyra því báðum hópum. Einn í viðbót er í inniskóm og þrír í sokkum. Þetta eru sjö starfsmenn en alls eru þeir tólf og það eru þá 12 – 7 = 5 starfsmenn í útiskóm því enginn er berfættur.



3. Minnsti mögulegi fjöldi parketfleka sem þarf til að þekja gólfið er 30 flekar. Heildarflatarmál gólfsins er 11 · 15= 165 m^2. Stóru flekarnir eru 6 m^2 og því ættu hugsanlega að komast $\frac{165}{6}$ = 27,5 slíkir flekar fyrir. Ekki eru notaðir hlutar úr fleka og því verða þetta 27 stórir og 3 litlir því hálfur stór fleki er 3 fermetrar og raðast þeir eins og sést á meðfylgjandi mynd. Nauðsynlegt er að rissa upp mynd af gólfinu og flekunum í réttum hlutföllum til að gera sér betur grein fyrir hvernig þeir gætu raðast.

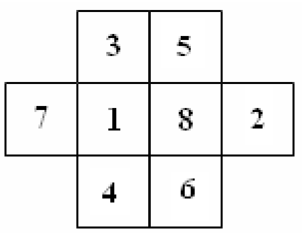


4. Fjöldi flísanna sem snerta veggi sturtuklefans er aðeins 32 því ekki má tvítelja hornaflísarnar. Á sama hátt og í þrautinni hér á undan finnst mörgum betra að rissa upp mynd af gólfinu til að gera sér betur grein fyrir hlutunum.



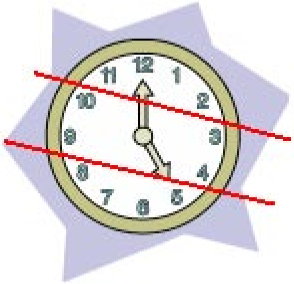
5. Þegar krakkarnir áræða að biðja pabba sinn um sakaruppgjöf er ákveðinn dagafjöldi liðinn. Þessum dagafjölda er hægt að skipta í þrjá jafna hluta og sá dagafjöldi sem eftir er jafngildir einum slíkum hluta. Það þýðir að heildardagafjöldinn er fjórir slíkir jafnstórir hlutar í allt. Heildarrefsingin var 48 dagar. Sá dagafjöldi sem eftir er jafngildir því $\frac{1}{4}$ af refsingunni, sem þýðir að eftir eru $\frac{48}{4}$ = 12 dagar.

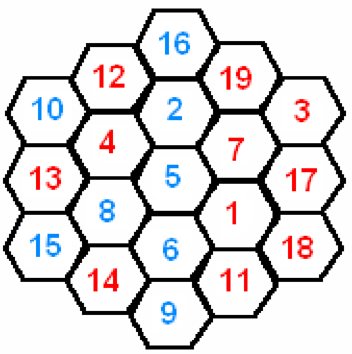
6.



7. Í þessarri þraut má sjá að samanlagðar verða þriggja stafa tala og tveggja stafa tala að fjögurra stafa tölu. Til að svo geti orðið hlýtur þriggja stafa talan að vera níu hundruð og eitthvað og fyrst sama talan Ó er í öllum sætunum þá hlýtur sú tala að vera 999. Jafnframt er vitað að V getur ekki verið neitt annað en 1 og að Æ getur ekki verið neitt annað en 0 því 999 + ÁÁ hlýtur alltaf að vera minna en 1100. Þá má sjá að fjögurra stafa talan á að vera eitt þúsund áttatíu og eitthvað, en það þýðir að ÁÁ er talan 88 og L er þá talan 7.

8. Heildarsumma talnanna á klukkuskífunni er 78. Ætlunin er að skipta skífunni upp í þrjá jafna parta þannig að hver hluti hlýtur að hafa summuna $\frac{78}{3}$ = 26. Það þarf síðan að prófa sig áfram til að finna út hvar á að draga strikin þannig að hver hluti hafi summuna 26.



9. 

Bls. 16 Bland í poka

Kennslugögn: Hver nemandi/hópur þarf að fá 20 eldspýtur eða tannstöngla.

1. Hér þarf einfaldlega að prófa sig áfram. Tölustafurinn er 4.

2. Neðsta vogin sýnir að einn hálfmáni jafngildir einum broskarli og einni stjörnu. Ef þessu tvennu er skellt á miðjuvogina í staðinn fyrir hálfmánann kemur í ljós að einn ferningur jafngildir tveimur stjörnum. Ef þessu tvennu er hins vegar skellt á efstu vogina í staðinn fyrir hálfmánann sést að einn ferningur jafngildir líka einni stjörnu og þremur broskörlum. Þetta þýðir að þrír broskarlar jafngilda einni stjörnu og af því leiðir að einn ferningur jafngildir sex broskörlum.

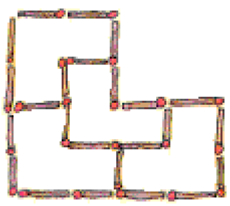
3. LVI = 50 + 5 + 1 = 56

XC = 10 minna en 100 = 100 – 10 = 90   XCVIII = 90 + 5 + 1 + 1 + 1 = 98

CD = 100 minna en 500 = 500 – 100 = 400   IV = 1 minna en 5 = 5 – 1 = 4

MCDXXIV = 1000 + 400 + 10 + 10 + 4 = 1424

LVI + XCVIII + MCDXXIV + IV = 56 + 98 + 1424 + 4 = 1582

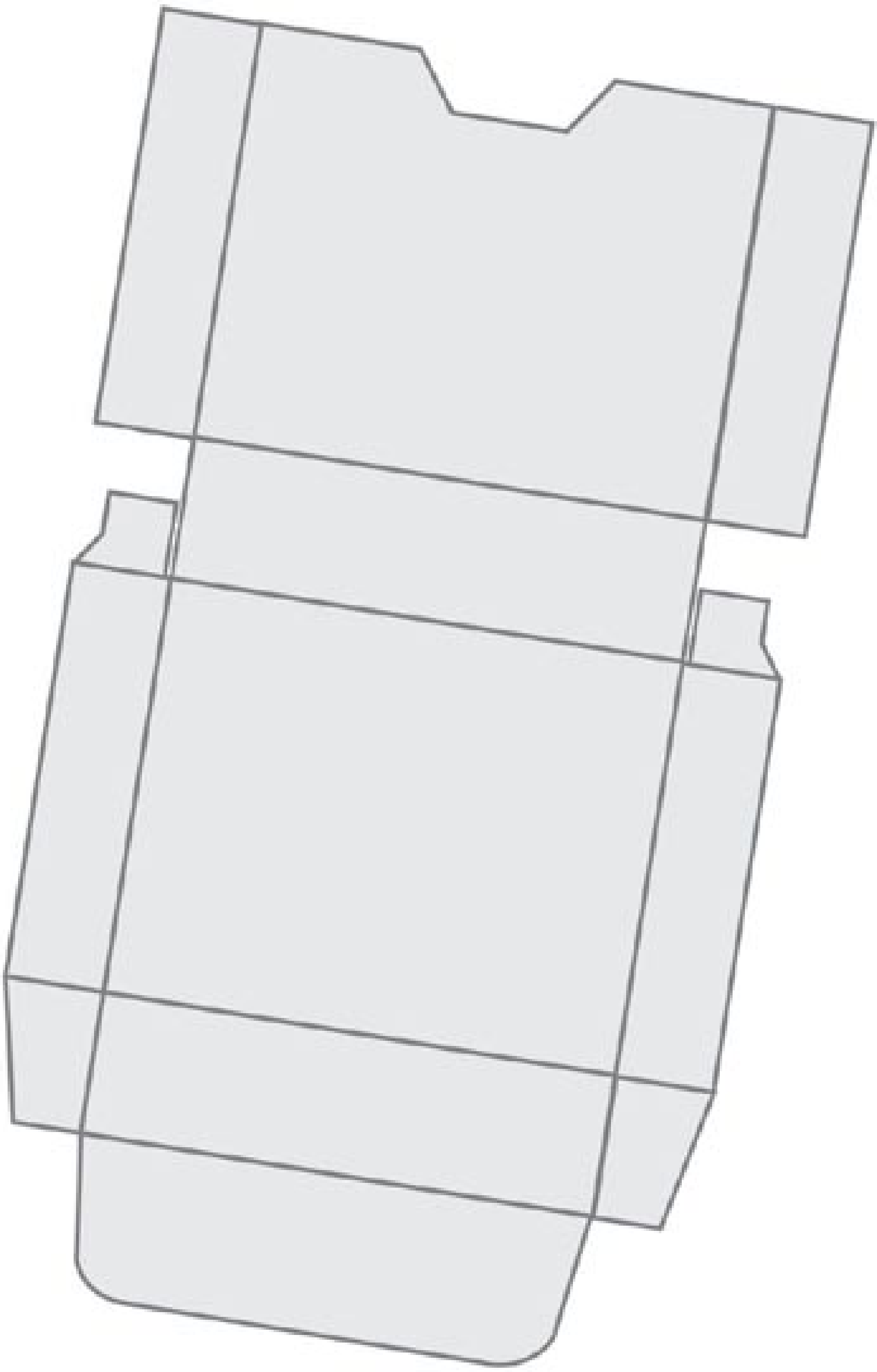
4. 

Eyðublað 1

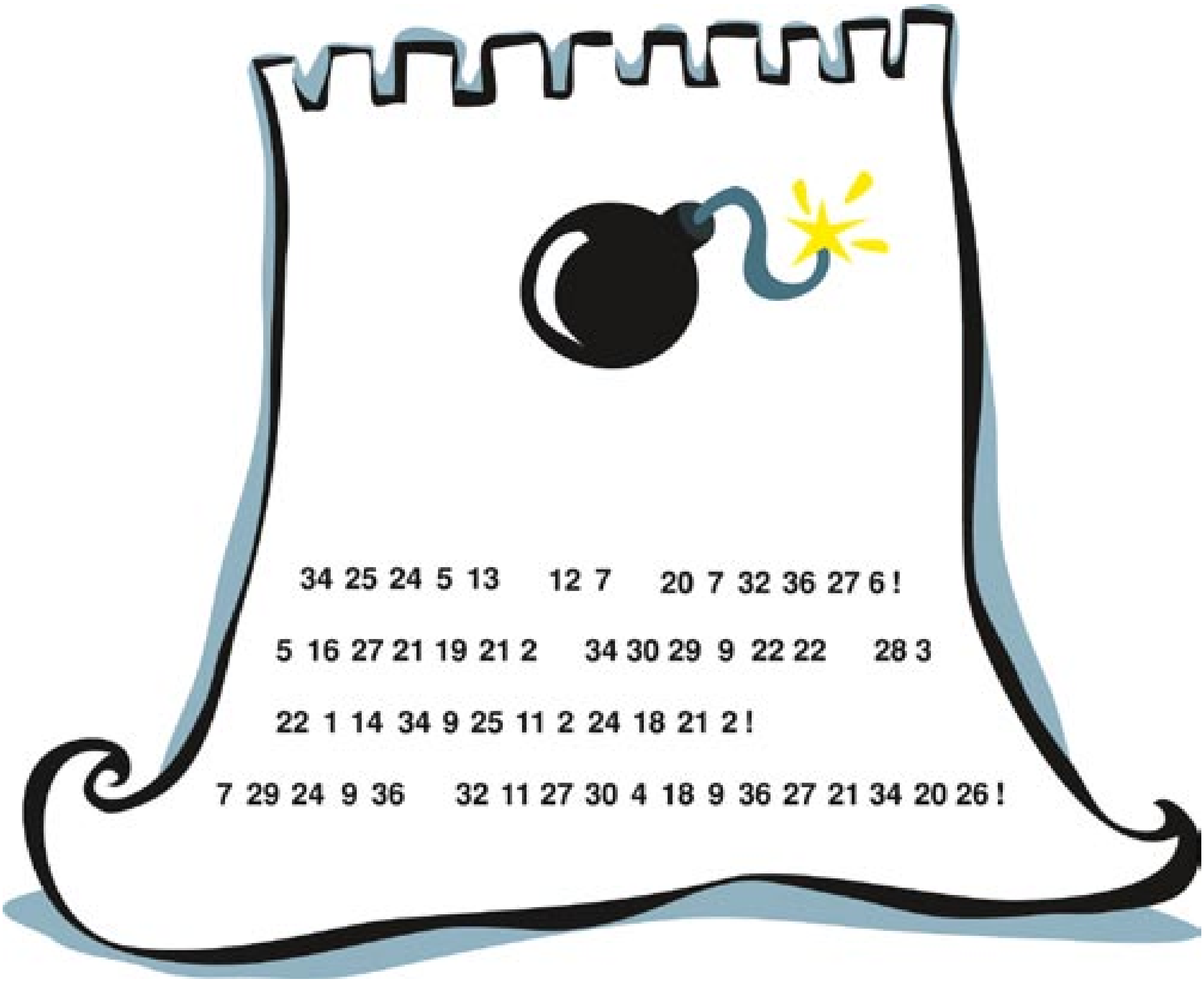
DULMÁLSLYKILLINN

6	A	Á	B	C	D	Ð
5	E	É	F	G	H	I
4	Í	J	K	L	M	N
3	O	Ó	P	Q	R	S
2	T	U	Ú	V	W	X
1	Y	Ý	Z	Þ	Æ	Ö
	1	2	3	4	5	6

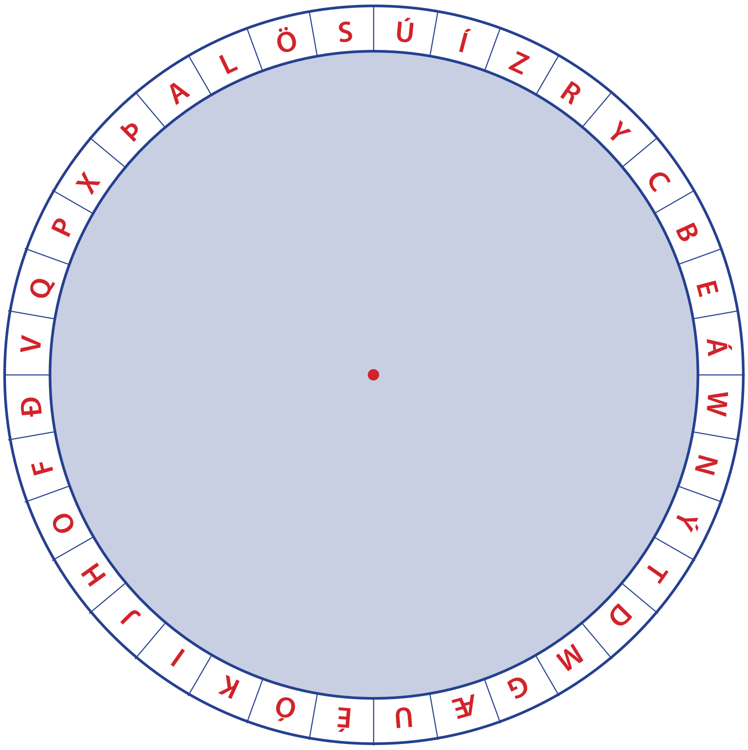
Eyðublað 2

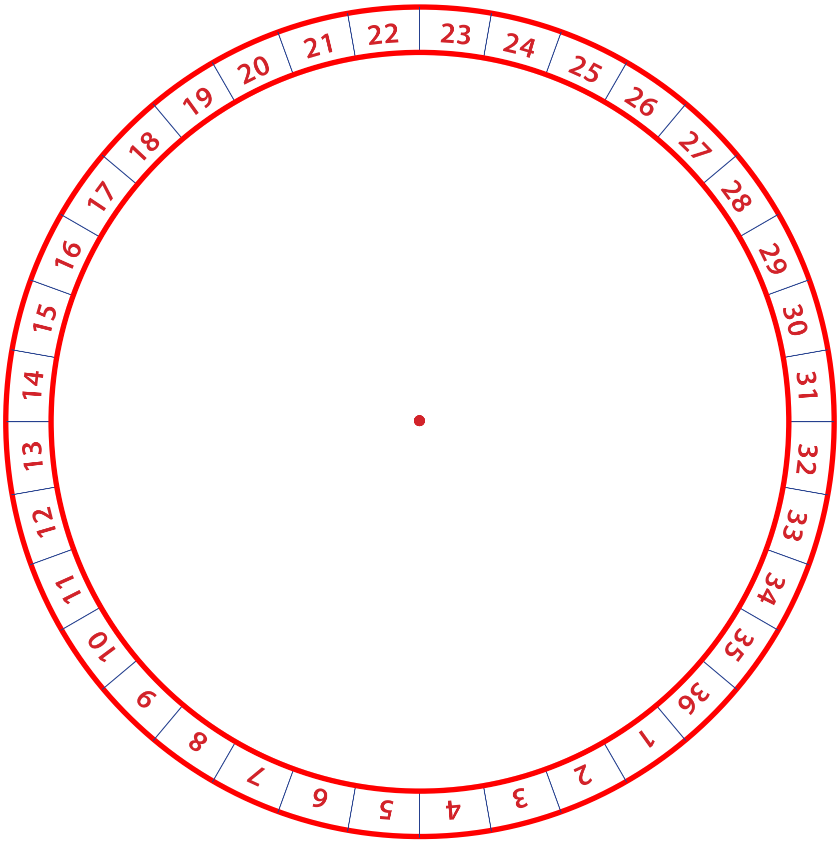


Eyðublað 3


34 25 24 5 13 12 7 20 7 32 36 27 6 !
5 16 27 21 19 21 2 34 30 29 9 22 22 28 3
22 1 14 34 9 25 11 2 24 18 21 2 !
7 29 24 9 36 32 11 27 30 4 18 9 36 27 21 34 20 26 !

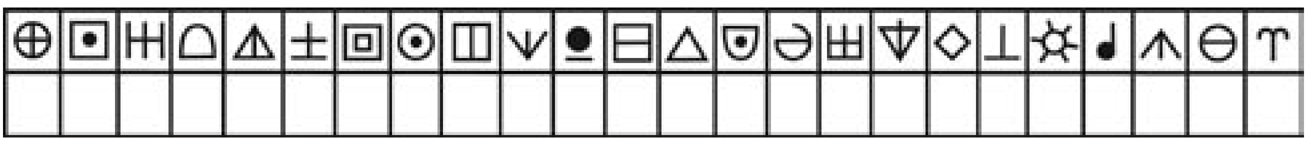
Eyðublað 4


Ú
Í
Z
R
Y
C
B
E
Á
W
N
Ý
T
D
M
G
Æ
U
É
Ó
K
I
J
H
O
F
Ð
V
Q
P
X
Þ
A
L
Ö
S


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36

Eyðublað 5

ý	0,000822707
x	0,0011655
æ	0,00603318
ó	0,00671877
ú	0,00671877
y	0,00740436
p	0,00877554
ö	0,00952969
é	0,0100096
j	0,0105581
b	0,0117921
á	0,0130947
d	0,0141917
þ	0,0165227
í	0,0187166
h	0,0221445
o	0,0236528
f	0,0238585
v	0,0303716
k	0,0307144
m	0,0356506
u	0,0427122
l	0,0433978
g	0,044289
ð	0,0446318
t	0,0548471
s	0,0567668
e	0,0740436
i	0,0741122
r	0,075689
n	0,0765117
a	0,104552



Eyðublað 6