



SKALI

KENNAARABÓK

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg · Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen · Bjørnar Alseth

m MENNTAMÁLASTOFNUN 8542

Skali 3B
Kennarabók

Heiti á frummálinu: Maximum 10 Læreren bok (seinni hluti)

Kápuhönnun: 07 Media - 07.no/Kristine Steen

Mynd á kápu: Shutterstock.com/Daniel Harwardt

Teikningar: Børre Holth

Ritstjóri norsku útgáfunnar: Åse Bergundhaugen/Thor-Atle Refsdal

© 2017 íslensk þýðing og staðfærsla: Kristín Bjarnadóttir

Leturgerð í meginmáli: Neo Sans Std, 9 pt.

Ritstjóri íslensku útgáfunnar: Auður Bára Ólafsdóttir

1. útgáfa 2017

Menntamálastofnun

Kópavogi

Umbrot: Menntamálastofnun

Þeim sem lásu yfir handrit og öðrum sem komu að verkinu og veittu góð ráð eru færðar bestu þakkir.



SKALI

KENNAARABÓK

STÆRÐFRÆÐI FYRIR UNGLINGASTIG

Grete Normann Tofteberg · Janneke Tangen
Ingvill Merete Stedøy-Johansen · Bjørnar Alseth

Efnisyfirlit

Um Skala V

Hæfnimarkmið og námsmarkmið X

Yfirlit yfir efnisþætti Skala XII

Tillaga að ársáætlun XIII

4 Föll 6

Annars stigs föll 8

Öfugt hlutfall 17

Í stuttu máli 22

Bættu þig! 23

5 Líkindareikningur 26

Frá reynslu til líkinda 28

Samsettar líkur, margir atburðir 33

Í stuttu máli 39

Bættu þig! 40

Þjálfaðu hugann 43

Um Skala

Með námsefninu Skala leitast höfundar við að skapa nemendum tækifæri til að læra stærðfræði á fjölbreytilegan og uppbyggilegan hátt. Námsefnið byggist bæði á samvinnunámi og einstaklingsmiðuðu námi. Höfundar telja að margbreytilegar aðferðir muni hvetja fleiri nemendur til virkrar þátttöku í eigin stærðfræðinámi.

Stærðfræði er skapandi grein, byggð á fræðilegu og ströngu kerfi; jafnframt er hún rökrétt og innihaldsrík. Til að vera góður í stærðfræði þarf maður að geta rökrætt, íhugað, deilt hugmyndum með öðrum, séð hið almenna í hinu sérstaka og farið frá hinu þekkta til hins óþekkta. Stærðfræði er hagnýt fræðigrein sem gefur færi á mismunandi túlkunum; hún er því í stöðugri þróun: Nýjar kenningar bætast við og eru teknar í notkun en gömlu kenningarnar halda samt sem áður gildi sínu. Nýju kenningarnar eru viðbætur og koma ekki í stað þess sem fyrir er. Stærðfræði fjallar um mynstur, tengsl og kerfi og býr yfir mjög öguðu tungutaki.

Í Skala er lögð sérstök áhersla á þrjú atriði:

- Að nemendur fáiast við fjölbreytileg og hagnýt verkefni þar sem tækifæri gefst til að rannsaka og skapa.
- Að nemendur öðlist sameiginlega námsreynslu sem feli jafnframt í sér einstaklingsmiðuð nám.
- Að grundvallarleikni og fagleg framvinna námsins séu höfð að leiðarljósi í samræmi við námskrá.

Í námsefninu Skala myndast, eftir því sem á líður, brú frá hinu hagnýta, rannsakandi og skapandi starfi yfir í meiri áherslu á hið sértæka námsefni. Námsþættirnir eru oftast kynntir til sögunnar á hlutbundinn hátt en sjónum er síðan smám saman beint meira að hinu óhlutbundna og formlega.

Uppbygging námsefnisins, þar sem skiptast á hlutbundin verkefni annars vegar og æfingar í staðreyndapekkingu og leikni hins vegar draga vel fram tengslin milli faglegs skilnings, leikni í faginu og notkunar þess. Hlutbundnu verkefni auka skilning nemenda á helstu námsþáttum, sem kaflarnir fjalla um, og jafnframt upplifa nemendur að þeir geta notað stærðfræðilega þekkingu sína og leikni við hversdagslegar aðstæður.

	Hæfnimarkmið	Námismarkmið
	<i>Markmið með kennslunni eru að nemandinn geti</i>	<i>Nemandinn á að læra að</i>
Kaflí 1 Skali 3A	<ul style="list-style-type: none"> • gert útreikninga varðandi neyslu, notkun kreditkorts, tekjur, lán og sparnað, sett fram fjárhagsáætlun, gert bókhald með töflureikni, gert grein fyrir útreikningum og kynnt niðurstöður 	<p>Laun, fjárhagsáætlun og bókhald</p> <ul style="list-style-type: none"> • reikna út laun og skatt • setja fram skilmerkilega fjárhagsáætlun með töflureikni • gera greinargott bókhald með því að nota töflureikni • útskýra útreikninga og kynna fjárhagsáætlun og bókhald • reikna með virðisaukaskatti <p>Lán og sparnaður</p> <ul style="list-style-type: none"> • reikna út vexti af bankainnistæðu • reikna út fjölda vaxtadaga • reikna með vaxtavöxtum • gera útreikninga varðandi neyslu • gera útreikninga varðandi notkun kreditkorts • skilja muninn á mismunandi tegundum lána • gera útreikninga sem varða lán með jöfnum afborgunum <p>Virðisbreyting</p> <ul style="list-style-type: none"> • reikna út endurtekna hækkun og lækkun í prósentum
Kaflí 2 Skali 3A	<ul style="list-style-type: none"> • rannsakað og lýst eiginleikum tví- og þrívíðra forma og hluta og notað eiginleikana í tengslum við rúmfræðilegar teikningar og útreikninga • gert, lýst og rökstutt rúmfræðilegar teikningar með hringfara og reglustiku og með rúmfræðiforriti • notað og rökstutt notkun einslögunar og Pýþagórasarreglunnar til að reikna út óþekktar stærðir • túlkað og gert vinnuteikningar og fjarvídarteikningar með fleiri en einum hvarfpunkti, með og án stafrænna hjálpartækja • reiknað með slumpreikningi og fundið lengd, ummál, horn, flatarmál, yfirborðsflatarmál, rúmmál, tíma, hraða og eðlisþyngd og notað og breytt mælikvarða • rannsakað, gert tilraunir með og sett fram röksamlega fullyrðingu með því að nota rúmfræðilegar hugmyndir og gert grein fyrir rúmfræðilegum tengslum sem eru mikilvægar í tæknigreinum, listum og arkitektúr • notað tölur og breytur til að kanna, gera tilraunir og leysa hagnýt og fræðileg verkefni í tengslum við tæknigreinar og hönnun 	<p>Þríhyrningsútreikningar</p> <ul style="list-style-type: none"> • reikna út lengd óþekkrar hliðar í rétthyrndum þríhyrningi • reikna út lengd hliða í sérstökum tegundum þríhyrninga • færa rök fyrir hvers vegna form eru einslaga • reikna út lengd hliða í einslaga myndum <p>Landakort og mælikvarði</p> <ul style="list-style-type: none"> • finna mælikvarða sem hlutfall milli eftirmyndar og frummyndar • nota mælikvarða til að reikna út fjarlægðir á landakorti • búa til og nota vinnuteikningar <p>Fjarvídarteikningar</p> <ul style="list-style-type: none"> • bera kennsl á og lýsa mismunandi notkun fjarvídará myndum og teikningum • teikna skissur með einum eða fleiri hvarfpunktum <p>Tækni, listir og arkitektúr</p> <ul style="list-style-type: none"> • þekkja nokkrar byggingatæknilegar meginreglur • þekkja mikilvæga eiginleika þríhyrninga • útskýra einkenni gullinsniðs

	Hæfnimarkmið	Námsmarkmið
	<i>Markmið með kennslunni eru að nemandinn geti</i>	<i>Nemandinn á að læra að</i>
Kafli 3 Skali 3A	<ul style="list-style-type: none"> greint samsett verkefni, áttað sig á föstum og breytilegum stærðum, tengt samsett verkefni við þekktar lausnaaðferðir, framkvæmt útreikninga og kynnt niðurtöður á markvissan hátt leyst jöfnur og ójöfnur af fyrstu gráðu og jöfnuhneppi með tveimur óþekktum stærðum og nota það til að leysa fræðileg og hagnýt verkefni fengist við, þáttað og einfaldað algebrustæður, tengt stæðurnar við aðstæður í daglegu lífi, reiknað með formúlum, svigum og almennum brotum og notað ferningsreglurnar 	<p>Línulegar jöfnur og línuleg jöfnuhneppi</p> <ul style="list-style-type: none"> leysa línuleg jöfnuhneppi með innsetningaraðferðinni leysa línuleg jöfnuhneppi með samlagningaraðferðinni leysa línuleg jöfnuhneppi með grafískri aðferð, þ.e. með teikningu setja upp og leysa línuleg jöfnuhneppi sem tengjast aðstæðum úr daglegu lífi reikna með formúlum <p>Bókstafareikningur</p> <ul style="list-style-type: none"> deila með almennum brotum í almenn brot reikna með almennum brotum þar sem teljari og nefnari geta innihaldið bókstafi þátta algebrustæður stytta almenn brot með bókstafsstæðum <p>Jöfnur leystar með þáttun. Ferningsreglurnar og ójöfnur</p> <ul style="list-style-type: none"> þátta annars stigs stæður nota ferningsreglurnar í báðar áttir leysa annars stigs jöfnur með þáttun, ferningsreglunum, samokareglunni og núllpunktsreglunni leysa fyrsta stigs ójöfnur
Kafli 4 Skali 3B	<ul style="list-style-type: none"> sett fram föll sem lýsa tölulegum venslum og aðstæðum úr daglegu lífi, með og án staf-rænna verkfæra, lýst þeim og túlkað þau og breytt úr einni framsetningu falla, t.d. grafi, töflu, formúlu og texta, í aðra borið kennsl á og notað eiginleika falla sem lýsa réttu eða öfugu hlutfalli, línulegra falla og annars stigs falla, og gefið dæmi um aðstæður úr daglegu lífi sem lýsa má með þessum föllum 	<p>Annars stigs föll</p> <ul style="list-style-type: none"> bera kennsl á annars stigs föll teikna fleygboga út frá fallstæðu segja til um topp- eða botnpunkt (hæsta og lægsta gildi) fleygboga finna jöfnu annars stigs falls þegar grafið er þekkt lýsa hliðrun fallsins x^2 yfir í $(x - a)^2 + b$ <p>Öfugt hlutfall</p> <ul style="list-style-type: none"> sjá tengsl milli hlutfallsstærða og stærða sem eru í öfugu hlutfalli hvorar við aðra sýna stærðir í öfugu hlutfalli hvorar við aðra á mismunandi vegu ganga úr skugga um hvort tvær stærðir eru í öfugu hlutfalli hvor við aðra finna topppunkta og botnpunkta (hæstu og lægstu gildi) nokkurra falla
Kafli 5 Skali 3B	<ul style="list-style-type: none"> fundið og rökrætt um líkur í tilraunum, hermílkönnum og útreikningum í verkefnum úr daglegu lífi og í spilum 	<p>Frá reynslu til líkinda</p> <ul style="list-style-type: none"> finna líkur með tilraunum framkvæma einfalda hermitilraun <p>Samsettar líkur, fleiri en einn atburður</p> <ul style="list-style-type: none"> reikna út líkur á fleiri en einum atburði samtímis gera greinarmun á því að draga hlut með eða án endurtekningar finna líkur á andstæðum atburði (fylliatburði) greina líkur í mismunandi spilum

Yfirlit yfir efnispætti Skala

	8. bekkur	9. bekkur	10. bekkur
Kafli 1	Tölur og talnareikningur <ul style="list-style-type: none"> - veldi - eiginleikar talna - þáttun, deilanleiki - rétt röð reikniðgerða - hugareikningur og slumpreikningur - negatífar tölur 	Talnareikningur <ul style="list-style-type: none"> - veldi með negatífum veldisvísium - tölur á staðalformi - óræðar tölur, ferningsrætur - prósentustig - meira en 100 prósent 	Persónuleg fjármál <ul style="list-style-type: none"> - laun, fjárhagsáætlun og bókhald - virðisaukaskattur - lán og sparnaður - debetkort og kreditkort - virðisbreyting
Kafli 2	Rúmfræði <ul style="list-style-type: none"> - punktur, lína, horn - hefðbundnar rúmfræði-teikningar, með hringfara og reglustiku - rúmfræðilegir staðir - mælingar og útreikningar á stærð horna - hnitakerfið - samhverfa í hnitakerfinu og utan þess 	Föll <ul style="list-style-type: none"> - hugtökin fall og breyta - mismunandi framsetningar falla (töflur, gröf, formúlur, texti, $f(x)$) - línuleg föll, hallatala og fasti - topp- og botnpunktar (hæsta og lægsta gildi) - föll og gröf sem stærðfræðilíkön 	Rúmfræði og hönnun <ul style="list-style-type: none"> - þríhyrningsútreikningar - Pýþagórasarreglan - einslögun - kort og mælikvarði - vinnuteikningar - fjarviddarteikningar - tækni, listir og arkitektúr - gullinsnið
Kafli 3	Almenn brot, tugabrot og prósent <ul style="list-style-type: none"> - hugareikningur og blaðreikningur - reikniðgerðirnar fjórar með almennum brotum og tugabrotum - stærsti sameiginlegi þátturinn og minnsta sameiginlega margfeldið - breyta tölum, sem skrifaðar eru á forminu almenn brot, tugabrot eða prósentur, úr einu forminu í annað - samanburður á stærðum talna 	Mál og mælieiningar <ul style="list-style-type: none"> - námundun og markverðir tölustafir - hlutfallareikningur - tímaúteikningar - reikningur með samsettum einingum 	Algebra og jöfnur <ul style="list-style-type: none"> - línulegar jöfnur og línuleg jöfnuhneppi - formúlureikningur - bókstafareikningur - þáttun - ferningsreglurnar - ójöfnur
Kafli 4	Tölfræði <ul style="list-style-type: none"> - söfnun gagna og kynning niðurstaðna - gildi sem lýsa miðsækni og dreifingu 	Rúmfræði og útreikningar <ul style="list-style-type: none"> - flatarmál og ummál - rúmfræði hrings - fleiri rúmfræðilegir staðir - þrívíddarrúmfræði, eiginleikar og einkenni rúmfræðiforma 	Föll <ul style="list-style-type: none"> - annars stigs föll - öfugt hlutfall
Kafli 5	Algebra og jöfnur <ul style="list-style-type: none"> - talnamynstur, alhæfing - bókstafareikningur með og án sviga - línulegar jöfnur, uppsettar og óuppsettar 	Líkur og talningarfræði <ul style="list-style-type: none"> - Vennmynd, sammengi, sniðmengi og fyllimengi - líkindareikningur með talningu - krosstöflur og líkindatré - lögmál stórra talna - umraðanir, að draga hluti með eða án endurtekningar 	Líkindareikningur <ul style="list-style-type: none"> - frá reynslu til líkinda - tilraunir og hermitilraunir - samsettir atburðir - draga hluti með og án endurtekningar - andstæðir atburðir (fylliatburðir) - líkur í spilum

Tillaga að ársáætlun

Vika nr.	Kafli	Pema	Mat	
34	1 Persónuleg fjármál	Laun, fjárhagsáætlun og bókhald	Forpróf fyrir kafla 1	
35				
36		Lán og sparnaður		
37				
38		Virðisbreyting		
39		Bættu þig!		
40		Bættu þig! / Þjálfaðu hugann	E.t.v. kaflapróf 1	
41	2 Rúmfræði og hönnun	Prírhyrningsútreikningar	Forpróf fyrir kafla 2	
42	HAUSTFRÍ			
43		Prírhyrningsútreikningar		
44				
45		Landakort og mælikvarði		
46		Fjarviddarteikningar		
47		Tækni, listir og arkitektúr		
48			Miðsvetrarpróf 10	
49		Bættu þig!		
50		Bættu þig! / Þjálfaðu hugann	E.t.v. kaflapróf	
51		JÓLAFRÍ		
52		JÓLAFRÍ		
53	JÓLAFRÍ			
1	3 Algebra og jöfnur	Línulegar jöfnur og línuleg jöfnuhneppi	Forpróf fyrir kafla 3	
2				
3		Bókstafareikningur		
4		Jöfnur leystar með þáttun. Ferningsreglurnar og ójöfnur		
5				
6		Bættu þig! / Þjálfaðu hugann	E.t.v. kaflapróf 3	
7	4 Föll	Annars stigs jöfnur	Forpróf fyrir kafla 4	
8	VETRARFRÍ			
9				
10		Öfugt hlutfall		
11				
12	PÁSKAFRÍ			
13		Bættu þig! / Þjálfaðu hugann	E.t.v. kaflapróf 4	
14	5 Líkindareikningur		Vorpróf í 10. bekk	
15		Frá reynslu til líkinda	Forpróf fyrir kafla 5	
16				
17		Samsettar líkur, fleiri en einn atburður		
18		Bættu þig! / Þjálfaðu hugann	E.t.v. kaflapróf 5	
19	Æfing og upprifjun	Æfingaverkefni fyrir skriflegt próf úr Skala 3B Æfingahefti, kafla 6		
20		Talningarfræði		
21				

Föll

Þessi kafli byggir ofan á efni *Skala 2A*, kafla 2. Hér eiga nemendur að kynna annars stigs föllum, einföldum ræðum föllum með brotum og læra að þekkja rétt og öfug hlutföll. Fallhugtakið er nemendum erfitt, líka í framhaldsskóla. Þess vegna er mikilvægt að leggja góðan grundvöll og að dýpka skilninginn smám saman á þessu mikilvæga stærðfræðilega hugtaki. Við reynum að gera nemendum ljóst sambandi milli þess hvernig grafið lítur út og algebrustæðunnar sem lýsir fallinu. Að auki eiga nemendur að læra að setja upp fallstæðu sjálfir, bæði út frá grafi og raunverulegum kringumstæðum. Ennfremur eiga þeir að læra að nota aðhverf (e. regression) í grafteikniforritum, líka fyrir annars stigs margliður.

Forþekking

- Fallhugtakið
- Línuleg föll
- Finna jöfnur fyrir beinar línur
- Lesa fallgildi af grafi falls
- Finna skurðpunkta milli grafs og ásanna, bæði með reikningi og grafi

Leggja má fyrir forþróf t.d. með því að leggja fyrir nemendur orðalistann í upphafi kaflans, til að draga fram hvaða færni og skilning nemendur hafa til að bera áður en vinna við kaflann hefst.

Nota má niðurstöðurnar til að gera áætlun um námið í bekkjardeildinni. Forþekking nemenda getur verið mikilvæg við nám á efni þessa kafla.

Fagleg tengsl

Föll eru mikilvægur þáttur í fræðilegri stærðfræði og er ríkur þáttur í því sem nefnt er örsmæðarreikningur (e. calculus). Föllin eru notuð við gerð líkana, þau eru notuð til að leysa viðfangsefni þar sem þarf að finna hámarks og lágmarks og þau mynda grundvöll undir diffurjöfnur sem eru ef til vill það sem mest not eru af í stærðfræði innan annarra fræðigreina.

Hagnýt notkun

Hægt er að gera líkan af margs konar aðstæðum með föllum. Ef tvær breytur eru hvor annarri háðar er

4 Föll

Blaðsíða 6–7

yfirleitt hægt að lýsa annarri þeirra sem falli af hinni. Það getur átt við í hagfræði, eðlisfræði, öðrum raungreinum, þróun fólksfjölda, útbreiðslu sjúkdóma, veðurspám o.s.frv. Föll er hægt að nota til flestra slíkra hluta.

Grundvallarfærni

Lestarfærni

Lestarfærnin í þessum kafla varðar bæði að lesa og skilja fagtesta, útskýringar og skýringardæmi, fyrir utan það að geta lesið texta sem þýða skal yfir í stærðfræðiverkefni til að leysa. Nemendurnir fást einnig við að lesa úr grófum, töflum og myndum í þessum kafla.

Munnleg færni

Nemendur þurfa að geta talað saman og útskýrt aðstæður og aðferðir sem þeir hafa notað og nota rétt fagheiti og hugtök.

Stafræn færni

Stafræn verkfæri eru notuð til að teikna gróf í þessum kafla.

Skrifleg færni

Nemendur eiga að geta skrifað táknið sem tilheyrir föllum á faglega réttan og ótvíræðan hátt. Þeir eiga að útskýra hvaða heiti þeir gefa breytunum og fallstæðunum.

Reikningsfærni

Nemendur æfa reikningsfærni þegar þeir þurfa að reikna út núllstöðvar og fallgildi og þegar þeir þurfa að ákveða hvort tvær stærðir standa í réttu eða öfugu hlutfalli hvor við aðra.

Faglegt innihald

Inngangur að föllum: Myndin á að leiða hugann að því að þegar eitthvað hangir frjálst í þyngdar sviðinu þá myndar það feril líkan fleygboga sem lýsa má með annars stigs falli.

Ábendingar

Stærðfræðiorð

Spyrjið hvort nemendurnir hafi heyrt einhver þessara orða. Ekki má búast við að þeir geti skýrt þau en hvetjið unglingana og segið að fljótlega muni þau skilja hvað þau öll þýði.

Rannsóknarverkefni

Þetta verkefni ættu nemendur að vinna. Finnið til þungan kaðal og látið tvo nemendur halda hvorn í sinn enda af kaðlinum sem á að vera yfir vellinum allan tímann. Kaðallinn á að vera slakur. Hvetjið nemendur til að lýsa forminu sem þeim sýnist kaðallinn hafa. Spyrið hvort þau hafi séð dæmi um aðra hluti með sama form. Hvetjið þau til að fara út með myndavélina í símanum og taka myndir af slíkum formum.

Teikniforrit mun eflaust námunda form kaðalsins með fallstæðu fyrir fleygboga. Í raun er hér um flóknari fall að ræða, svonefnt keðjufall.

Einfaldasta formúla þess er

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Einfaldari verkefni

Undirbúið nemendur undir að læra nýtt námsefni með því að rifja upp og draga fram reynslu og þekkingu úr kafla 2 í *Skala 2A*.

Notið verkefnablað 3.4.1. Afritið orðaspjöldin og klippið þau í sundur. Nemendur vinna í tveggja eða þriggja manna hópum. Þeir draga spil til skiptis og útskýra merkingu orðsins fyrir hinum. Látið nemendurna gjarnan teikna á meðan þeir útskýra.

Erfiðari verkefni –

Ýmis verkefni

Krossgáta

Vinnið með hugtök tengd föllum með því að nota krossgátu. Sjá verkefnablað 3.4.2.

Faglegt innihald

- Upprifjun á línulegum föllum og beinum línunum
- Hallatala og fastaliður í línulegum jöfnum
- Skurðpunktar milli beinna lína og ásanna
- Finna jöfnur beinna lína út frá grafi

Annars stigs föll

Blaðsíða 8–9

Ábendingar

Samtal um námsmarkmiðin. Kennari skýrir nemendum gjarnan stuttlega frá við hvað er átt með annars stigs föllum og hvernig fleygbogi lítur út. Kennari teiknar fleygboga með topppunkt og annan með botnpunkt. Hvetja mætti nemendur til að útskýra hvað þeir haldi að topppunkturinn og botnpunkturinn geti táknað.

Við höfum valið að draga fram að rita má línuleg föll á nokkra mismunandi vegu. Kennari gæti gjarnan gefið dæmi með tölum og teiknað þessar línur sem sýnidæmi:

- 1 $y = -2x + 3$; hallatala -2 , skurðpunktur við y -ás $(0, 3)$
- 2 $3x + 2y = 12$; $x = 0$ gefur $y = 6$, og $y = 0$ gefur $x = 4$. Þá eru skurðpunktarnir við ásana $(0, 6)$ og $(4, 0)$, og það verður auðvelt að teikna línuna.

Sýnidæmi 1

Kennari getur látið nemendur leysa verkefnið í dæminu í litlum hópum. Á eftir geta þeir skoðað tillöguna að lausn og borið saman við eigin lausnir.

4.1

Allar þessar línur eru ritaðar á forminu $y = ax + b$, svo að það ætti að vera auðvelt fyrir nemendur að leysa verkefnið.

4.2

Nemendur munu trúlega geta lesið hallatöluna og skurðpunktinn við y -ásinn og ritað línuna á forminu $y = ax + b$.

Grundvallarfærni

Viðfangsefnið krefjast góðrar lestrarfærni.

Einfaldari verkefni

Kennari getur látið nemendur nota teikniforrit við verkefni 4.1 og 4.2.

Í verkefni 4.1 geta nemendur lesið skurðpunktana við x -ásinn og y -ásinn og notað halli[<lína>] t.d. í teikniforritinu GeoGebra, t.d. halli[f] hafi forritið nefnt línuna f . Nemendur eru hvattir til að kanna sambandi milli fallstæðunnar og svara við verkefnum.

Í verkefni 4.2 geta nemendur merkt skurðpunktana við x - og y -ása sem þeir geta lesið af myndunum og svo teiknað línurnar í teikniforritinu. Þá kemur jafna línunnar fram í algebruglugganum. Hér geta þeir líka notað forritið til að lesa hallatöluna svo að þeir geta séð að það stemmir við töluna fyrir framan x í jöfnu línunnar.

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Nemendur eru hvattir til að skrifa jöfnurnar í verkefnum 4.1 og 4.2 á forminu $ax + by = c$.

Faglegt innihald

- Línuleg föll og beinar línur
- Kynning á annars stigs föllum, hagnýt sýnidæmi

Blaðsíða 10–11

Ábendingar

Við höfum valið að setja fram nokkur verkefni þar sem línuleg föll skera ásana. Kennari áréttar við nemendur að aðferðin á við allar gerðir falla.

Skurðpunktur við y -ás:

Setjum $x = 0$ og reiknum út fallgildið. Það getur aldrei orðið meira en einn punktur. Ritháttur: $(0, f(0))$.

Skurðpunktur við x -ás:

Setjum $y = f(x) = 0$ og leysum jöfnuna sem kemur fram. Fyrir línuleg föll er það bara einn punktur en önnur föll geta haft marga skurðpunkta við x -ás. Punktarnir eru á forminu $(x_0, 0)$.

Kennari áréttar að allir punktar á y -ás hafa $x = 0$, og allir punktar á x -ás hafa $y = 0$. Jafna y -áss er $x = 0$, og jafna x -áss er $y = 0$.

Kennari lætur nemendur lesa textann í bláa rammanum.

- *Hvers vegna heita föll á þessu formi annars stigs föll?*

Kennari gæti gjarnan látið nemendur teikna dæmi um slík föll í teikniforriti. Þeir geta sjálfir valið gildin á a , b og c .

Grundvallarfærni

Nemendur eru hvattir til að lesa sýnidæmi 2, vinna verkefnið með teikniforriti og skrifa lausnina í orðum. Þeir fá þá æfingu í lestri, skrift og stafrænni færni.

Einfaldari verkefni

Nemendur geta notað teikniforrit til að leysa verkefnið en það þarf að gæta þess að þeir ígrundi lausnirnar og sjái sambandið á milli grafs og fallstæðu.

Kynning með teikniforriti

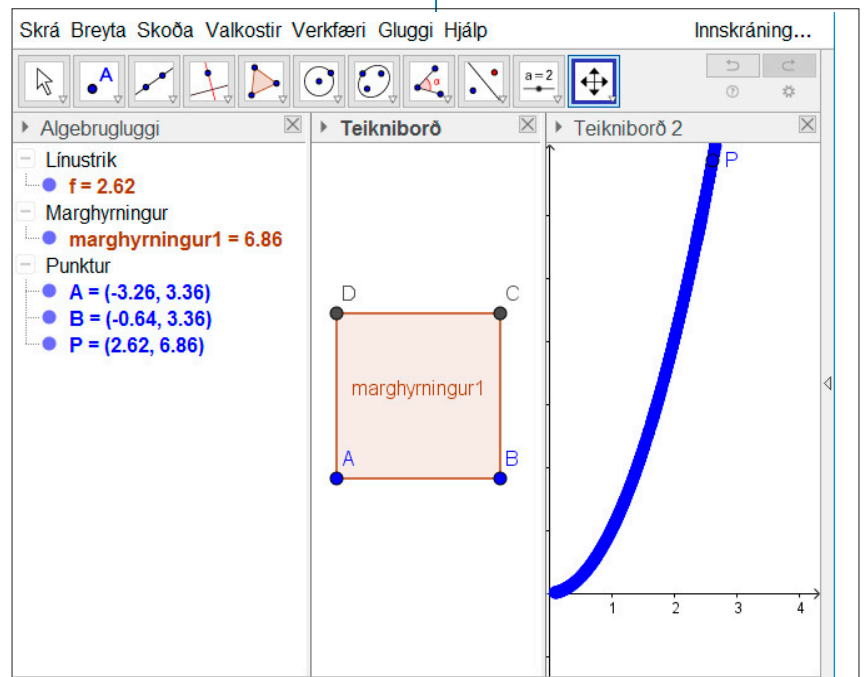
Notið „Skoða“ í valmyndinni og framkallið tvö teikniborð. Á öðru þeirra eru ásarnir fjarlægðir og

teiknaður ferningur með hjálp verkfærisins „Reglulegur marghyrningur“. Mæliverkfærið er notað til að mæla hliðarlengd a og flatarmál marghyrningsins. Á hinu teikniborðinu eru ásarnir inni og settur inn punkturinn $P = (a, \text{marghyrningur1})$. Sett er inn slóð P og stærð ferningsins breytt.

- *Hvað heitir grafið sem kemur fram á teikningunni?*
- *Af hverju virðist það vera hálf?*
- *Hvers vegna er þetta stundum nefnt „ferningsfall“?*

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Nemendur eru beðnir um að finna skurðpunkta fallsins í Sýnidæmi 1 með reikningi. Þeir eiga að hafa leyst slíkar jöfnur í 3. kafla. Þetta er góð aðferð til að átta sig á tengslunum innan námsefnisins. Algebran í 3. kafla er mikilvæg fyrir athuganir á föllum í þessum kafla.



Faglegt innihald

- Annars stigs föll í hagnýtu samhengi

Búnaður

- Kaðlar/snæri í mismunandi lengdum
- Metrakvarði
- Málband
- Verkefnablað 3.4.3
- Tölva

Blaðsíða 12–13**Ábendingar**

Nemendur eru hvattir til að finna heppileg formengi fallanna í verkefnum 4.6, 4.7 og 4.8.

4.8

Margir nemendur vilja strax halda að stálþráðarbútarnir tveir séu jafnlangir en um það segir ekki neitt í verkefninu. Þá væri heldur ekki neitt fall. Ætlunin er að nemendur sjái að sé hliðin í öðrum ferningnum x eru notaðir $4x$ af stálþræðinum. Þá er $40 - 4x$ eftir fyrir hinn ferninginn og þá er hver hlið hans $10 - x$. Samanlagt flatarmál verður $x^2 + (10 - x)^2$. Fylgjast þarf með að nemendur noti aðra ferningssetninguna til að leysa upp svigann. Ef ekki þarf að minna þá á það.

Ýmis verkefni - Formúlan fyrir kaðal í þyngdarsviði

Í þessu verkefni safna nemendur empírískum gögnum með því að mæla kaðalinn sinn. Þessi gögn eru sett inn í töflureikni í t.d. GeoGebra. Því næst geta nemendur notað annars stigs aðhvarf til að finna jöfnu fleygboga. Nemendur fá verkefnablað 3.4.3 með uppskrift af því hvernig aðhvarfið er fengið. Athugið að fleygbogaaðhvarfið er einungis nálgunarfall fyrir annað fall sem kaðall í þyngdarsviði fylgir. Það er nefnt keðjufall (e. catenary) og formúla þess er $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, öðru nafni kósínus hýperbólikus.

Grundvallarfærni

Í verkefnunum á bls. 12 fá nemendur þjálfun í lestri, skrift og reikningi. Kaðalverkefnið æfir nemendur í lestri og þjálfar þá í stafrænni færni. Þessi aðferð, að finna fallstæðu fyrir empírísk gögn, má nota fyrir alls konar föll.

Einfaldari verkefni

Nemendur fá 40 cm langan snæribút. Þá geta þeir leyst verkefnið fyrir tiltekna skiptingu á snærinu. Nemendur geta sjálfir ákveðið hvernig þeir vilja skipta snærinu til að reikna dæmið með áþreifanlegum hætti en það ætti að biðja þá um að velja hæfilegar lengdir. Þeir eiga ekki að skipta snærinu í tvo jafnlanga búta.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Kennari býður nemendum að fara út og mæla alls konar fyrirbrigði sem mynda fleygboga. Það getur verið vatn úr vatnsslöngu, bolti sem er kastað upp í loft og annað slíkt. Nemendur geta líka tekið myndir og framkvæmt mælingar á myndunum.

Faglegt innihald

- Annars stigs fallið $f(x) = x^2$
- Annars stigs fallið $h(x) = (x - a)^2$

Blaðsíða 14–15

Ábendingar

Líta má á öll annars stigs föll sem hliðranir og stríkkanir á grunnfallinu $f(x) = x^2$. Á næstu sex síðum kynnum við annars stigs föll þar sem við lítum á samhengið á milli fallstæðunnar og grafísku myndarinnar.

Bls. 14

Fyrst verða nemendur að skilja hvers vegna graf x^2 lítur út eins og það gerir. Reyna ætti að fá nemendurna til að greina fallstæðuna sjálfir. Þeir gætu settið saman í litlum hópum og fengist við einfaldar spurningar eins og þessar:

- Hvaða formerki fær $f(x)$ fyrir ólík gildi á x ?
- Hvar sker grafið x -ásinn og y -ásinn?
- Veljið $x = 1$ og $x = -1$. Reiknið út $f(x)$. Veljið því næst $x = 2$ og $x = -2$. Reiknið út $f(x)$. Eftir hverju takið þið? Er þetta alltaf svona? Hvað segir það um graf f ? Lýsið grafinu með orðum.
- Er nokkur samhverfa í f ?
- Teiknið megindrætti í grafi f .
- Teiknið graf f með teikniforriti.

Bls. 15

Við tökum eitt atriði fyrir í einu við að breyta grunnfallinu $f(x) = x^2$. Fyrst skiptum við á x og $(x - a)$. Svo rannsökum við fallið $h(x) = (x - a)^2$. Kennari getur beðið nemendur að rannsaka graf h á sama hátt og gert var hér á undan og bera það saman við graf x^2 . Til þess að það verði ekki of erfitt mætti sýna nemendum dæmi. Annað hvort mætti velja $a = 2$ eins og í kennslubókinni eða láta nemendur skoða annað dæmi um tvö mismunandi föll. Nota mætti til dæmis $h(x) = (x - 3)^2$. Nemendur mættu gjarnan gera sams konar athuganir á falli þar sem $a < 0$, til dæmis $h(x) = (x + 2)^2$.

- Hvaða formerki getur $h(x)$ haft fyrir ólík gildi á x ?
- Hvar sker grafið x -ásinn og y -ásinn?
- Hvaða gildi þurfið þið að velja á x þegar $h(x) = 1$. Hvað þarf x að vera til að $h(x) = -1$? Hvað um $h(x) = 4$ og $h(x) = -4$?
- Graf f er samhverft um y -ásinn. Er nokkur samhverfa í f ?
- Teiknið megindrætti í grafi f .
- Teiknið graf f með teikniforriti.

Eftir þetta geta nemendur lesið fagtextann í bókinni.

4.10

Nú er kominn tími til að nota teikniforrit til þess sem það gagnast best, nefnilega tilraunavinnu. Hér eiga nemendur að setja inn rennistiku fyrir a og sjá að þegar þeir breyta gildi á a flyst grafið til vinstri og hægri. Hafi nemendur gert athuganirnar hér að framan ættu þeir ekki að verða hissa yfir að sé tala dregin frá x hliðrast grafið til hægri og sé tölubætt við x hliðrast grafið til vinstri.

Grundvallarfærni

Þessi fagtexti er krefjandi í lestri en það er mikilvægt að nemendur lesi hann. Það veitir góða æfingu í að tileinka sér stærðfræði á æðra stigi. Áður en nemendur lesa textann getur verið gott að leyfa þeim að hugsa sig um og finna svolítið út sjálf. Þá kemur skilningur á annan hátt. Nemendur eiga að nota teikniforrit og fá þannig þjálfun í stafrænni færni.

Einfaldari verkefni

Þeir nemendur sem eiga í erfiðleikum með að gera athuganirnar sjálfir í huganum eða í höndunum gætu hugsanlega gert tilraunirnar strax í teikniforriti.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Nemendur eru látnir leysa upp svigann í $h(x) = (x - a)^2$ (önnur ferningssetning). Þeir eru hvattir til að segja hvað þessi stæða segir um graf h .

- Hvaða kostir og gallar eru við að líta á fallstæðuna á þessa tvo vegu?

Faglegt innihald

- Annars stigs fallið $g(x) = x^2 + b$
- Annars stigs fallið $k(x) = (x - a)^2 + b$

Búnaður

- Tölva með teikniforriti

Blaðsíða 16–17

Ábendingar

Bls. 16

Við skoðum nú fallið $g(x) = x^2 + b$ út frá grunnfallinu $f(x) = x^2$. Á sama hátt og áður mætti biðja nemendur um að rannsaka graf g og bera það saman við grafið af x^2 . Gott er að láta nemendur skoða skýringardæmi til þess að verkið verði ekki of erfitt. Velja má annað hvort $b = -4$ eins og í kennslubókinni eða nota annað dæmi um tvö mismunandi föll, til dæmis $g(x) = x^2 - 1$ og $g(x) = x^2 + 1$.

- Hvaða formerki getur $g(x)$ haft fyrir mismunandi gildi á x ? (Til dæmis er $x^2 - 1$ jákvæð tala þegar $x < -1$ og $x > 1$, jöfn núlli þegar $x = -1$ og $x = 1$, og neikvæð milli -1 og 1 . Hins vegar er $x^2 + 1$ alltaf jákvætt).
- Hvar sker grafið x -ás og y -ás? ($x^2 - 1$ sker x -ás í $x = -1$ og $x = 1$, og y -ás í $(0, -1)$. $x^2 + 1$ sker aldrei x -ás en sker y -ás í $(0, 1)$).
- Berðu fallgildi g saman við fallgildi f þegar sömu x -gildi eru valin. Hvað sérð þú? (Fallgildi g eru alltaf 1 minni eða 1 stærr).
- Graf f er samhverft um y -ásinn. Hefur graf g einhvern samhverfuás? Ef svo er, hvaða línu? Lýstu grafinum með orðum.
- Teiknaðu megindrætti grafsins g .
- Teiknaðu graf g með teikniforriti.

Eftir þetta geta nemendur lesið fagtextann í bókinni.

Ef b er neikvæð tala er hægt að umrita fallstæðu g með samokasetningunni. Sjá einhverjir nemendur þetta til dæmis þegar þeir eiga að finna skurðpunktana við x -ásinn?

4.11

Kennari lætur nemendur vinna saman tvo eða þrjú og biður þá um að tala um það sem þeir taka eftir. Því næst vinna þeir saman um að koma orðum

að setningu um hvernig f breytist (liður c).

Bls. 17

Fylgja má sömu aðferð og á bls. 16 og beina svipuðum spurningum til nemenda. Gerið nemendum ljóst eða látið þá finna út sjálfa að gröf falla á þessu formi ganga ekki alltaf í gegnum upphafspunkt. Það er háð gildum á a og b (samanber verkefni 4.12 og athugasemdir við það).

Grundvallarfærni

Þessi fagtexti er krefjandi lesefni en það er mikilvægt að nemendur lesi textann. Það veitir góða æfingu í að tileinka sér stærðfræði á æðra stigi. Áður en nemendur lesa textann getur verið gott að leyfa þeim að hugsa sig um og finna svolítið út sjálf. Þá kemur skilningur á annan hátt. Nemendur ættu að nota teikniforrit og fá þannig þjálfun í stafrænni færni.

Einfaldari verkefni

Kennari lætur nemendur teikna þrjú til fjögur mismunandi gröf með tiltekin gildi fyrir a og b . Þá geta þeir lesið botnpunktana og fundið samhverfuása fyrir þessi föll áður en þeir fara að gera tilraunir með rennistikur.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Getuðu fundið formúluna?

Tveir nemendur vinna saman með tölvu og blað til að skrifa á. Annar nemandinn teiknar graf falls á forminu $f(x) = (x - a)^2 + b$, felur algebruggann og sýnir hinum nemandanum. Sá á að finna fallstæðuna og skrá hana. Ef nemandinn getur það fær hann stig annars fær sá stig sem teiknaði grafið. Nemendur skipta um hlutverk.

Spilið til dæmis í tíu mínútur. Teljið stigin. Vinningshafinn verður fleygbogameistari.

Faglegt innihald

- Annar stigs fallið
 $f(x) = cx^2$
- Annar stigs fallið
 $f(x) = c(x - a)^2 + b$

Æfingahefti

4.8, 4.9

4.15

4.22

Blaðsíða 18–19

Ábendingar

Það getur verið erfitt að fá nemendur til að ákveða gildi c í fallstæðunni $f(x) = c(x - a)^2 + b$. Gefið þeim vísbendingu um að horfa á fjarlægðina í y milli topppunkts/botnpunkts og punktsins sem er eina einingu til vinstri og til hægri við hann. Þessi fjarlægð samsvarar c .

Nemendur eru beðnir um að prófa þetta með teikniforritinu á tölvunni svo að þeir sjái hvort það stemmi. Einhverjir geta kannski útskýrt hvers vegna það hlýtur að vera rétt. Ef reiknað er út

$f(a + 1) = f(a - 1) = c + b$ má sjá að y -gildið í þessum punkti mínus b er jafnt c .

4.13

Kennari athugar hvort nemendur hafi áttað sig á textanum fyrir ofan. Sé ekki svo mætti benda þeim á hann og hvetja þá til að kanna hann nánar.

Grundvallarfærni

Í þessu efni þjálfar nemendur lestur og stafræna færni. Verkefni 4.13 veitir góða möguleika á rannsóknum. Ef nemendur vinna sýnidæmi 3 á eigin tölvu fá þeir ennþá meiri æfingu í stafrænni færni. Fagtextinn á bls. 18 er gagnlegur til lestrarþjálfunar. Minna má nemendur á að ráðlegt sé að sitja með blað og blýant og skrifa hjá sér og rissa teikningar á meðan þeir eru að lesa stærðfræði.

Einfaldari verkefni

Kennari getur látið nemendur teikna fleiri gröf af gerðinni $f(x) = cx^2$ með tilteknum jákvæðum og neikvæðum c -gildum áður en þeir fara að gera tilraunir með rennistikuna.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Kennari getur látið nemendur nota teikniforrit og rannsaka fallið $f(x) = c(x - a)^2 + b$ með þremur rennistikum, a , b og c . Þeir eru þá beðnir um að halda tveimur rennistikum föstum og láta þá þriðju vera breytilega. Þá eiga þeir að lýsa því hvað verður um grafið og gera það skriflega í bækurnar sínar til að æfa skriflega færni í stærðfræði.

Á eftir gætu nemendur safnast í þriggja manna hópa. Þeir segja frá því hvað fastarnir merkja í grafinu. Sá fyrsti segir frá a , annar segir frá b og þriðji nemandinn frá c .

Faglegt innihald

- Samhengi milli grafs og jöfnu annars stigs falla

Æfingahefti

4.10

4.16

4.23

Blaðsíða 20–21

Ábendingar

Bláu verkefni eru fremur einföld. Nemendur þurfa að tileinka sér að í falli á forminu $f(x) = (x - a)^2 + b$ er (a, b) botnpunkturinn og $x = a$ er samhverfuásinn. Í bláu verkefnum er ekki mínus fyrir framan x^2 og það þýðir að ekkert fallanna hefur topppunkt. Það er heldur enginn fasti fyrir framan x^2 . Svo að grafið er jafn breitt og graf x^2 .

Í gulu verkefnum er ekki „allt í einum pakka“ en öll tilbrigðin finnast í grænu verkefnum. Í grænu verkefnum getur verið hliðrun upp og niður, til hægri og vinstri, topp- eða botnpunktar, víðari eða þrengri gröf.

Með hjálp þessara grafa eiga nemendur líka að ígrunda hvað sé hægt að segja um gröf falla á forminu $f(x) = c(x - a)^2 + b$ með tilliti til $f(x) = ax^2 + bx + c$. Fyrri formið gerir auðvelt að sjá topp- og botnpunkta en á síðara forminu má sjá hvar grafið sker y -ásinn.

4.20

Þegar hér er komið sögu eiga nemendur að hafa séð mörg dæmi um gröf. Þeir ættu að hafa tekið eftir að gröf liggja stundum alveg yfir x -ásnum, stundum alveg undir, stundum skera þau x -ásinn á tveimur stöðum og stundum snerta þau x -ásinn í topp- eða botnpunktinum. Þau sker alltaf y -ásinn þó að það geti verið svo hátt uppi eða langt niðri að það sjáist ekki innan þess talnasviðs sem nemendur hafa teiknað grafið í. Með slíka reynslu geta nemendur sagt að A hafi rangt fyrir sér, B rétt, og C og D rangt. Kanna þarf hvort nemendum sé ljóst að núllstöðvar eru hið sama og skurðpunktar við x -ás.

4.21–4.22

Það er ekki ætlast til að nemendur noti teikniforritið í þessum verkefnum. Þeir sem geta ekki ákvarðað fallstæður geta teiknað meginrætti grafanna í staðinn.

Grundvallarfærni

Hér eiga nemendur að lesa stærðfræðitákn og þýða táknin yfir á útlit grafanna. Þeir eiga að tala stærðfræðilegt mál og koma orðum að því hvaða eiginleika annars stigs falla þeir hafa séð. Þeir fá æfingu í lestri og munnlegri stærðfræði.

Einfaldari verkefni

4.14

Ef nemendurnir geta ekki svarað spurningunum út frá fallstæðunum geta þeir teiknað gröfin í GeoGebru og notað grafið til að svara spurningunum. Þá ætti að benda þeim á að taka eftir samhenginu milli fallstæðanna og svaranna sem þeir lesa af gröfunum. Nemendur ættu að vinna saman í litlum hópum.

4.15

Nemendum sem finnst erfitt að leysa upp sviga og draga rétt saman geta teiknað gröfin í GeoGebru og lesa þar skurðpunktinn við y -ásinn.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Þrjár spurningar

Tveir nemendur vinna saman. Nemandi A teiknar graf annars stigs falls og nemandi B setur fram spurningar um fallið. Ef hún/hann ræður við það fær B stig. Annars fær nemandi A stigið. Því næst skipta nemendurnir um hlutverk. Hver nemandi teiknar og giskar að minnsta kosti á fimm gröf/fallstæður. Ætlunin með viðfangsefninu er að nemendum verði ljóst hvaða spurningar sé snjallt að bera fram til að finna fallstæðuna.

Faglegt innihald

- Samhengið milli grafs og jöfnu annars stigs falls

Búnaður

- Verkefnablað 3.4.4
- Verkefnablað 3.4.5
- Talningarkubbar eða spilapeningar í tveimur litum/gerðum

Blaðsíða 22–23

Æfingahefti

4.11

4.17

4.24

Ábendingar

4.24

Í a er botnpunkturinn $(-2, 1)$. Punktarnir sem liggja einni einingu vinstri megin eða hægra megin við botnpunktinn á x -ásnum liggja líka einni einingu fyrir ofan hann á y -ásnum. Fallstæðan er þá á forminu $f(x) = (x - a)^2 + b$. Þar sem botnpunkturinn hefur x -gildið -2 , er $a = -2$, og y -gildið 1 sýnir að $b = 1$; $f(x) = (x + 2)^2 + 1$.

Í b er botnpunkturinn á x -ásnum þannig að $b = 0$ í fallstæðunni $f(x) = c(x - a)^2 + b$. $a = -2$ eins og í verkefni a og þar með er $f(x) = c(x + 2)^2$. En c er ekki jafnt 1 . Það getur verið svolítið erfitt að lesa af y -gildin fyrir $x = -3$ og $x = -1$. Einn valkostur getur verið að sjá að $y = 5$ þegar $x = 0$. Þá er $f(0) = 4c = 5$, svo að $c = \frac{5}{4}$. Þetta lítur út fyrir að stemma við y -gildin fyrir $x = -3$ og $x = -1$ (sjá líka athugasemdir við blaðsíður 18 – 19).

Í c sjáum við að $a = 3$, $b = -3$ og $c = \frac{1}{2}$. Ef nemendur eru ekki alveg vissir um c -gildið (ef y -gildin fyrir $x = -4$ og $x = -2$ eru nákvæmlega jöfn $\frac{1}{2}$, geta þeir athugað með $x = 0$. Ef $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 3$, er $f(0) = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}$. Það stemmir við skurðpunktinn milli grafsins og y -ássins.

4.27

Speglun á f um x -ásinn gefur $g(x) = -f(x)$. Í þessu verkefni fáum við $g(x) = -x^2 - 4x + 3$. Speglun á $f(x)$ í y -ásnum gefur $h(x) = f(-x)$. Þá fæst $h(x) = (-x)^2 + 4(-x) - 3 = x^2 - 4x - 3$.

4.28

Hér eiga nemendur að sjá mismuninn á föllunum tveimur. f hefur botnpunktinn $(-a, -2)$, en g hefur topppunktinn $(a, 2)$. Biðja ætti

nemendur að lýsa hvernig föllin hreyfast þegar a -gildin breytast.

Grundvallarfærni

Nemendur fá tækifæri til að þjálfra stafræna færni við að gera tilraunir með gróf annars stigs falla. Þeir þjálfra reikningsfærni við að átta sig á samhenginu milli grafs og fallstæðu og við að skilja tákinn sem notuð eru. Lestrarfærnin er brýnd þegar þeir eiga að lesa textann í sýnidæmi 4 og í verkefnunum á bls. 23.

Einfaldari verkefni

Notið verkefnablað 3.4.5. Það er tilbrigði við fleygbogalottó með einfaldari fallstæðum.

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Fleygbogalottó

Notið verkefnablað 3.4.4. Nemendur spila saman tveir og tveir. Hvert par fær spilaborð og eitt sett af spilum. Á spilaborðinu og á spilunum eru bæði gróf og fallstæður. Nemendurnir stokka spilin og leggja þau þannig að myndahliðin snúi niður. Fyrsti nemandi dregur spil og reynir að finna grafið/fallstæðuna sem tilheyrir því. Ef nemandinn getur það ekki er spilið lagt neðst í bunkann og hinn nemandinn tekur við. Ef nemandinn finnur stæðuna er spilið lagt á réttan stað á leikborðinu og nemandinn merkir sér spilið með kubb eða spilapeningi. Spilið þar til öll spilin eru komin á sinn stað. Sá nemandi vinnu sem hefur merkt sér flest spil.

Afbrigði af spilinu: Spilið með opin spil. Leggið öll kortin á borðið þannig að myndirnar snúi upp. Sá vinnur sem fyrstur getur lagt þrjú (eða fjögur) spil í röð, lárétt, lóðrétt eða á ská.

Faglegt innihald

- Annars stigs föll sem stærðfræðileg líkön

Æfingahefti

4.12

4.18

4.25, 4.26

Blaðsíða 24–25

Ábendingar

Þegar annars stigs föll eru notuð til að gera líkan af raunverulegum aðstæðum er oft notast við takmarkað formengi. Kenna þarf nemendum að ákvarða gildisbil líkananna og að vera gagnrýnir á niðurstöðurnar.

Sýnidæmi 5

Þetta er sýnidæmi af líkani um kostnað og tekjur við framleiðslu og sölu vöru. Nemendur munu kynnst slíkum dæmum betur á hagfræðikjörsviðum framhaldsskóla. Þar læra þeir að deilda hagnaðarfallið til að finna hagstæðustu framleiðslutöluna til að hafa sem mestan afrakstur. Nemendur ráða nú þegar við það með því að teikna hagnaðarfallið (tekjur mínus kostnaður) og lesa hámarks-punktinn (sjá verkefni 4.29 bls. 26).

Nemendur ættu að teikna gröfin í dæminu og finna svörin með hjálp teikniforrits.

Grundvallarfærni

Nemendur ættu að vinna sýnidæmi 5 með teikniforriti. Þá fá þeir æfingu í að teikna gröf með takmörkuðu formengi og lesa af svörin sem spurt er um í dæminu.

Einfaldari verkefni

Nemendur vinna í litlum hópum. Þeir gætu notað GeoGebru og unnið allt sýnidæmi 5 saman. Nemendur lesa textann, ræða hvað hann þýðir og svara spurningunum. Þá er auðveldara að skilja um hvað dæmið snýst og hvernig leysa má það sem krafist er.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Nemendur reyna að ímynda sér aðstæður sem lýsa má með annars stigs föllum. Það geta verið áþreifanlegar aðstæður (kast, vatnsbuna úr

garðslöngu, ...) eða stærðfræðilíkön (kostnaðarföll, vaxtarföll, o.s.frv.). Nemendur geta leitað á netinu, leitað fyrir sér í náttúrunni eða bara rætt saman.

Gjalda skyldi samt varhug við að hrapa að ályktunum. Flest náttúruleg fyrirbrigði vaxa og hrörna samkvæmt lögmálum sem fela í sér vísisföll, eins og til dæmis keðjuferillinn þótt annars stigs fall geti vel verið gott nálgunarfall í ýmsum tilvikum.

Faglegt innihald

- Annars stigs föll í raunveruleikanum, stærðfræðileg líkön

Búnaður

- Tennisboltar eða aðrir litlir boltar

Æfingahefti

4.13, 4.14

4.19-4.22

4.27, 4.28

Blaðsíða 26–27

Ábendingar

Í tengslum við kastverkefni gæti það verið þess virði að nefna að þó að köstin séu lóðrétt má lýsa hæðinni yfir vellinum eftir tímann t sem annars stigs falli af tímanum. Það getur virst undarlegt af því að brautin er línuleg (beint upp) en það er af því að hröðun felst í hreyfingunni.

4.30

Hér stendur ekki að nemendur eigi að nota teikniforrit og einhverjir nemendur muni kannski reyna að leysa verkefnið án þess að teikna graf. Nemendur gætu leyst a og c með reikningi en fyrir b og d hafa þeir ekki lært neina reikniáðferð til að leysa verkefnið.

Verkefni a er einfaldlega hægt að leysa með því að reikna $f(0) = 20$. Steininum er kastað úr 20 metra hæð. Í c geta nemendur reiknað út tímann sem líður þar til steinninn er aftur 20 m yfir vatninu. Jafnan verður $f(x) = 15t + 20 - 4,9t^2 = 20$. Þegar við umröðum liðum í jöfnunni sjáum við að fastaliðurinn 20 hverfur. Við það verður hægt að leysa jöfnuna með því að þátta og nota núllpunktssetninguna:

$$15t - 4,9t^2 = 0$$

$$t(15 - 4,9t) = 0$$

$$t = 0 \text{ eða } t = 15 : 4,9 = 3,09$$

Það þýðir að steinninn er meira en 20 m yfir vatninu í um það bil 3 sekúndur.

Grundvallarfærni

Hér eru gerðar kröfur til nemenda um að lesa stærðfræði í formi orðadæma. Þá getur verið gott að nemendur vinni saman í litlum hópum. Þeir geta lesið hver fyrir annan og rætt hvað segir í textanum. *Hverjar eru aðstæðurnar? Hvað fáum við að vita? Um hvað er spurt? Því næst*

geta þeir leyst verkefnið hver fyrir sig. Þegar þeir eru búnir geta þeir borið lausnirnar saman hver við annan.

Einfaldari verkefni

Í verkefni 4.32 geta nemendur notað kaðal eða snæri sem líkan af girðingunni. Þá mætti úthluta 100 cm löngum snærum og láta nemendur klippa og mæla. Þá er auðveldara að sjá að hægt er að reikna hliðarnar án þess að taka inn nýjar breytur. Einhverjir nemendur mundu prófa að leita að tveimur tölum með margfeldið 525 sem hafa summuna 50 í staðinn fyrir að leysa jöfnu eða teikna graf og lesa af því. Það er bara fagnaðarefni ef nemendur finna eigin aðferðir og þá er hægt að stofna til umræðna um kosti og ókosti ólíkra aðferða.

- Hvaða aðferðir eru góðar einmitt hér og hverjar þeirra hafa almennt gildi og væri hægt að nota í svipuðum verkefnum síðar meir?*

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Kasta fleygboga

Viðfangsefnið hentar best utan dyra. Nemendur skipast í þriggja manna hópa og hver hópur fær tennisbolta eða eitthvað slíkt. Tveir nemendanna skipa sér í vissri fjarlægð hvor frá öðrum sem þeir ákveða sjálfir. Þriðji nemandinn kastar bolta í fleygboga sem byrjar hjá öðrum þeirra og endar hjá hinum. Nemandinn kastar þrisvar. Í fyrsta skipti ætti hæsti punkturinn að vera um 2 metrar yfir vellinum, í annað skipti 4 m og í síðasta skiptið 5 m. Á eftir eiga hinir nemendurnir tveir að gefa stig fyrir hvert kast.

- 2 stig ef bolti byrjar og endar á réttum stað

- 2 stig er topppunkturinn er um það bil á réttum stað (að mati nemendanna tveggja)

Svo skiptast þeir á um að kasta. Nú eiga þeir tveir sem standa að hafa aðra fjarlægð sín á milli en áður. Að lokum á þriðji nemandinn að kasta. Stigin eru svo talin að lokum.

Á eftir ræða nemendur hvernig þeir þurftu að kasta til að byrja og enda rétt og hver munurinn væri á hvernig er kastað þegar köstin eiga að hafa mismunandi hæð en byrja og enda á sama stað.

Að lokum: Notið t.d. GeoGebru til að gera líkan af köstum. Hvernig lítur fallstæðan út?

Faglegt innihald

- Hlutfallsstærðir
- Viðfangsefni með öfug hlutföll

Búnaður

- Reiðhjól með hraðamæli
- Málband eða mælihjól
- Stoppklukka
- Verkefnablað 3.4.6

Öfugt hlutfall

Blaðsíða 28–29

Æfingahefti

4.28, 4.30

4.36

4.41, 4.42

Ábendingar

Bls. 28

Inntakið á síðunni er upprifjun úr *Skala 2A*, kafla 2, bls. 88–93.

4.35

Nemendur verða að muna að réttu hlutfalli á að vera hægt að lýsa með jöfnu á forminu $y = kx$. Verkefni í lið f er gert þannig að nemendur verða að umrita stæðuna til að sjá að hún lýsir réttu hlutfalli.

4.37

Nemendur eiga að finna að eitt grafið (4) lýsir réttu hlutfalli en að auki þarf að hvetja þá til að segja frá því sem þeir vita um hin gröfin. Bæði gröf 1 og 2 eiga að vera þekkt.

Ýmis verkefni - Hraði og tími

Ef verkefnið á að heppnast vel er mikilvægt að hafa sem nákvæmust mælitæki. Talið fyrirfram um það hver eigi hraðamæli og hverjir muni verða með reiðhjól daginn sem vinna á verkefnið. Nemendur þyrftu að æfa sig í að halda jöfnum hraða áður en verkefnið fer í gang. Nemendur eiga að átta sig á því að margfeldið af hraða og tíma er alltaf hið sama innan óvissumarka (sem eru háð nákvæmni í mælingum) og að punktarnir fjórir liggja ekki á beinni línu. Það getur verið krefjandi fyrir nemendur að breyta km/klst. í m/s. Þeir ættu að finna út stuðulinn 3,6 með því að ræða saman.

Mörgum finnst gott að setja fram slíkt samhengi í eins konar minnisþríhyrning. Við viljum forðast það af því að það veitir bara vélræna nálgun að því hvernig sé best að reikna. Þegar sá dagur rennur upp að röðin í þríhyrningnum er gleymd missir nemandinn færni. Við viljum að nemandinn skilji samhengi og geti reiknað breytingar frá einu formi til annars.

Fyrir suma nemendur er notkun eininga góður algebrískur stuðningur til að fikra sig fram með rökstuðningi fyrir samhengi sem þeir hafa ef til vill gleymt (hraði sinnum tími hlýtur að vera vegalengd þar sem $m/s \cdot s = m$). Verkefnið er hægt að tengja svipuðum námsmarkmiðum í náttúrufræðigreinum.

ATHUGIÐ: Í 1. útgáfu, 1. prentun, *Skala 3B* á bls 29 í hnitakerfinu á að standa m/s en ekki mín/sek.

Grundvallarfærni

Verkefnið um hraða og tíma þjálfar munnlega færni þegar nemendur eiga að vinna saman við að mæla og reikna. Það er líka hægt að þjálfa skriflega færni ef nemendur eiga að skila niðurstöðum í skýrslu. Hér má greina á milli þess að skrá hugsanir sínar, skrá niður minnisþunkta og að undirbúa sig undir kynningu.

Skráning hugsana: Látum nemendur lesa yfir hvað þeir eiga að fara að gera. Áður en farið er út eru teknar nokkrar mínútur í að nemendur skrifa frjálst um hvað þeir halda að muni gerast úti. Skráning hugsana má vera sveiflukennd og brotakernd, henni er fyrst og fremst ætlað að fá nemendur til að ígrunda hvað þeir kunna frá fyrri tíð og hvað þeir halda að þeir eigi að uppgötva og læra.

Skráning minnisþunkta: Á meðan nemandinn er að vinna við æfinguna skrá þeir minnisþunkta. Fyrir utan það að skrá minnisþunkta geta þeir skráð hjá sér hvort allt fór eins og áformað var eða hvort upp komu einhvers konar vandamál og hvers eðlis þau voru.

Undirbúningur fyrir kynningu: Nemendurnir skrifa fyrir ákveðinn aðila. Hér mætti bjóða nemendum að velja sér ákveðinn viðtakanda. Það er sérstaklega hvetjandi að skrifa fyrir

raunverulegan viðtakanda. Blogg getur verið heppilegur miðill.

Einfaldari verkefni

Tengið rétt hlutfall við kunnuglegar aðstæður með léttum tölum:

- Ef eitt epli kostar 50 krónur, hvað kosta þá þrjú epli, sex epli, tólf epli? Hvað verður um verðið þegar fjöldi eininga tvöfaldast?
- Ef múrsteinn vegur 2 kg, hve mikið vega fimm, tíu, tuttugu múrsteinar? Hvað verður um magnið þegar fjöldi eininga tvöfaldast?

Einkenni rétts hlutfalls er að y -gildið tvöfaldast líka þegar við tvöföldum x -gildið.

Gott er að nota gröf til að sýna þetta sama (verkefnablað 3.4.6). Þá má láta nemendurna lesa punkta af grafinu og sjá hvað verður um y -gildið þegar x tvöfaldast og öfugt. Ef teiknuð er línan $y = 0,5x - 1$ má biðja nemendur að útskýra hvort um rétt hlutfall sé að ræða og rökstyðja svarið.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Hlutfallaveiðar

Útbúið veggspjald þar sem safnað er saman ýmsum dæmum um rétt hlutfall. Nemendur fá það sem vikuverkefni að finna að minnsta kosti tvö dæmi úr hversdagslífinu þar sem rétt hlutfall kemur fyrir. Safnið öllum tillögnum saman á veggspjaldið (nota má t.d. gula miða). Kemur eitthvert atriði fyrir oftan en einu sinni?

Faglegt innihald

- Dæmi úr lífinu þar sem öfug hlutföll koma fyrir

Búnaður

- Tölva með teikniforriti

Æfingahefti

4.31-4.33

4.37, 4.38

4.43

Blaðsíða 30–31

Ábendingar

Sýnidæmi 6

Gjarnan má nota spurningar undir liðnum „Einfaldari verkefni“ sem kynningu á vinnunni framundan.

Í a-lið er svarið $y = \frac{60000}{x}$, en í lið b sjáum við að notað er

$f(x) = \frac{60000}{x}$ þegar teikna á grafið með teikniforriti. Benda þarf nemendum á mismuninn. Í viðfangsefnum um rétt og öfugt hlutfall er venja að nefna breytur tvær x og y . Þegar við notum teikniforrit verðum við hins vegar að fá forritið til að skilja að við viljum láta teikna grafið sem fall og það er gert með því að setja stæðuna á formið $f(x)$. Í þessu tilviki getum við sem sagt sagt að $f(x) = y$.

4.38–4.40

Í öllum þremur verkefnum er teiknað samfellt graf. Við getum rætt um hversu réttmætt það er fyrst við getum ekki séð fyrir okkur brot úr lyftuferðum eða fólki sem tínir upp rusl. Það er samt sem áður venja að notast við slíka samfellda lýsingu en það er mikilvægt að nemendur skilji að svarið verður að vera heil tala þegar samhengið í verkefninu gefur til kynna að annað er ekki hægt.

Grundvallarfærni

Að teikna og túlka grafískar myndir er talsverður þáttur í lestrar- og ritfærni í stærðfræði. Að auki notum við starfræn verkfæri sem nemendur þurfa að tengja við stafræna færni.

Einfaldari verkefni

Hér er tækifæri til að koma með köku (eða eitthvað enn hollara). Við getum gert nokkrar tilraunir í huganum áður en tekið er til við kökuna.

- *Ef þetta væru verðlaun sem Pétur og Páll (nota nöfn úr bekknum) eiga að skipta á milli sín, hvað fær hvor þeirra þá mikið?*
- *Hvað fær hver mikið ef við skiptum bekknum í tvö lið og annað liðið fær kökuna eftir keppni á milli liðanna?*
- *Hve mikið fær hver ef við bjóðum öðrum bekk með okkur og allir nemendurnir fá kökubita?*
- *Hve mikið fær hver nemandi ef við bjóðum öllum skólanum?*
- *Er hægt að bjóða svo mörgum að ekkert verði handa hverjum?*
- *Er hægt að skipta neikvæðri köku?*

Nota má fleiri sýnidæmi með mörgum punktum og teikna punktana inn í hnitakerfi. Umræða um form og eiginleika grafsins.

Á bls. 31 geta nemendur lesið texta verkefnanna hver fyrir annan og unnið saman við að túlka innihaldið og kynna lausnina.

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Rannskið verð þar sem líklegt er að verð og fjöldi standi í öfugu hlutfalli hvort við annað, til dæmis mánaðakort og fjöldi ferða, tímabundinn aðgangur, til dæmis ársaðgangur að einhverju og fjöldi heimsóknna, mismunandi áskriftir o.s.frv.

Búið til verkefni um öfugt hlutfall.

Faglegt innihald

- Almennar stæður um öfug hlutföll

Búnaður

- Tölva með teikniforriti

Æfingahefti

4.34

4.44-4.47

Blaðsíða 32–33

Ábendingar

Sýnidæmi 7

Hér sýnum við hvers vegna við þurfum að reikna út marga punkta þegar við viljum teikna graf breiðboga án stafrænna tækja. Skoðið vel gildatöfluna.

- *Hvað er sérstakt við punktana í gildatöflunni? (Tveir og tveir punktar speglast um upphafspunkt).*

4.41

Nemendur geta haft sýnidæmi 7 sem fyrirmynd.

4.42

Þetta er greiningarverkefni sem hentar vel til ígrundunar og umræðu í bekknum.

4.43

Ef notað er teikniforrit er mikilvægt að nemendur muni að stilla kvarðana á ásunum. Í liðum b og c verða nemendur að átta sig á hvort þeir eigi að lesa x -gildi eða y -gildi af grafinu.

4.44

A og B lýsa öfugu hlutfalli, en C og D lýsa réttu hlutfalli.

Grundvallarfærni

Verkefnin á bls. 33 reyna á mismunandi færni. Það að geta teiknað graf fallega og nákvæmt án stafrænna hjálpartækja er skrifleg færni í stærðfræði. Það að geta túlkað gröfin er tengt lestrarfærni. En að geta rætt og fært rök með eða á móti fullyrðingum krefst munnlegrar færni.

Einfaldari verkefni

Nemendur ættu gjarnan að vinna saman tveir og tveir en gæta þarf þess að ekki sé of mikill munur á námsgetu þeirra. Verkefni 4.41 er einnig hægt að víkka út og það veitir meiri þjálfun ef nemendur velja sér sjálfir fall. Gjarnan mætti láta þá velja $y = \frac{k}{x}$, þar sem $-20 < k < 20$. Þeir teikna graf fallsins sem þeir hafa valið, skiptast svo á gröfum án þess að sýna fallstæðuna og reyna að sjá út frá grafinu hvaða fall var teiknað.

Erfiðari verkefni

Samhengið milli þriggja stærða

Margar stærðir eru háðar hver annarri, þrjár og þrjár. Nemendur fá slíkar þrenndir og eru hvattir til að svara eftirfarandi spurningum:

- *Hvaða stærð verður að vera fasti til þess að hinar tvær standi í réttu hlutfalli hvor við aðra?*
- *Hvaða stærð verður að vera fasti til að þess hinar tvær standi í öfugu hlutfalli hvor við aðra?*

Mögulegar þrenndir:

- vegalengd - hraði - tími
- massi - rúmmál - eðlismassi
- massi - kraftur - hröðun
- spennan - viðnám - straumstyrkur
- bandarískur dollar - íslensk króna - gengi
- dl saft - dl vatn - styrkleiki blöndu
- lengd - breidd - flatarmál (rétthyrnings)
- fjöldi vinnustunda - tímakaup - heildarlaun

Faglegt innihald

- Aðstæður sem skapa öfugt hlutfall

Búnaður

- Venjulegur spilastokkur fyrir hverja tvo nemendur



Blaðsíða 34–35

Ábendingar

Sýnidæmi 8

Dæmið sýnir okkur að við getum kannað hvort um sé að ræða öfugt hlutfall með því að margfalda saman öll þör af x og y og sjá hvort sama niðurstaða fæst. Berið það saman við rétt hlutfall. Nemendur geta fljótt farið að rugla hlutum saman hér.

4.45

Verkefnið er leyst með teikniforriti en hentar líka vel til að vinna án stafrænna hjálpartækja.

4.46

Ógrun fyrir nemendur: Kanóleigan þarf á nýju auglýsingaspjaldi að halda en forsendurnar hafa ekki breyst. Hvað ætti að standa á spjaldinu?

4.47

Nemendur þurfa að prófa bæði að margfalda og deila.

4.48

Verkefnið hentar til að útskýra hvað eru akkorðslaun.

4.49

Verkefnið hentar vel til að leysa samkvæmt EHB-aðferðinni, einstaklingur, hópur, bekkur (IGP-metoden). Nemendur fá nokkrar mínútur til að mynda sér skoðun sjálfir. Síðan taka við umræður í tveggja til þriggja manna hópum áður en hver og ein fullyrðing er rökrædd í öllum hópnum.

A: Fullyrðingin er sönn og hlutfallsfastinn er 2π .

B: Fullyrðingin er sönn.

C: Fullyrðingin er ósönn, hér er lýst réttu hlutfalli.

D: Fullyrðingin er ósönn.

Samhengið er annars stigs fall.

E: Fullyrðingin er sönn.

F: Fullyrðingin er ósönn, hér er lýst réttu hlutfalli.

Grundvallarfærni

Aðalmarkmiðið með þessu verkefni er að auka reikningsfærni nemenda en það fer eftir því hvernig verkefnin eru leyst hvaða færni er dregin fram.

Einfaldari verkefni

Það er mikilvægt að nemandinn tengi stæður á forminu $y = \frac{k}{x}$ við gildatöfluna. Veljið einfaldari tölur og gefið bara upp eitt y -gildi. Hvetjið nemendur til að finna k og afganginn af y -gildunum þegar um er að ræða öfugt hlutfall.

Dæmi

x	2	3	5
y	15		

x	2	4	8
y			3

Erfiðari verkefni

Valið úr spilastokk

Notið venjulegan spilastokk. Hér er það gildi spilsins sem skiptir máli, ekki liturinn. Veljið spil í þrjá bunka: A, B og C. Raða á spilunum þannig að gildin í A standa í réttu hlutfalli við gildin í B og í öfugu hlutfalli við gildin í C. Hve mörg spil er hægt að hafa í hverjum bunka án þess að vanta spil?

Tillaga að lausn með bunkum með þrjú spil:

A	B	C
4	2	3
6	3	2
12	6	1

Blaðsíða 36–37

Ábendingar

Inntak þessara verkefna gæti verið utan við þægindaramma 10. bekk- inga og er ætlað nemendum sem sýna mjög góðan árangur og þarfnast mjög krefjandi viðfangsefna. Þess vegna eru öll verkefni merkt með grænu.

Sýnidæmi 9

Hér er sýnt samhengi sem er sett fram með ræðu broti (þ.e. með breytu í nefnara) en lýsir ekki öfugu hlutfalli. Fall sem lýsir öfugu hlutfalli hefur alltaf bæði x -ás og y -ás fyrir aðfella en hér sjáum við að grafið lyftist þegar 8000 er bætt við fallið. Gott er að bera áhrifin sem viðbótin hefur á grafið saman við reynslu sem nemendur hafa af annars stigs föllum með lóðréttri hliðrun, saman- ber bls. 16.

Við erum með rætt fall þegar fallstæðan hefur x í nefnara. Föll sem lýsa öfugu hlutfalli eru sértílvik af ræðum föllum á sama hátt og rétt hlutfall er sértílvik af línulegum föllum.

Þegar við eigum að finna lárétta aðfella verðum við að athuga hvað verður um fallgildið þegar x -gildið verður stærra og stærra og nálgast óendanlegt. Í föllunum á þessari blaðsíðu sjáum við að það er x í nefnaranum og síðan viðbót við brotið. Þegar x verður mjög stórt verður gildi brotsins mjög lítið og að lokum hefur það einungis hverfandi gildi í samanburði við viðbótina. Þegar x nálgast óendanlegt nálgast brotið núll og gildi stæðunnar nálgast gildi viðbótarinnar.

4.50

Þetta skýrist við að reikna út tvo punkta og sýna að margfeldin $x \cdot y$ fá ekki sama gildi.

4.52

Ef nemendurnir teikna grafið með forriti geta þeir fundið núllstöðvar með hjálp forritsins. Ef ekki, geta þeir alltaf fundið núllstöðvarnar með því að setja fallstæðuna jafna núlli og leysa jöfnuna. Það er vert að taka eftir að föll sem lýsa öfugu hlutfalli hafa ekki núllstöðvar.

Grundvallarfærni

Aðalmarkmiðið með verkefnum á þessum síðum er að gefa nemendum dýpri og víðari skilning á eiginleikum fallanna. Skilningur á stærðfræðilegu samhengi er nátengdur reiknings- færni.

Einfaldari verkefni

Innihaldið á þessum síðum er ætlað nemendum sem sýna mjög góðan árangur. Þarfnist nemendur einfaldari verkefna mælum við með því að þeir fái að sleppa þessu efni.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Spurningakeppni

Bekknun er skipt í lið með 2-3 nemendum í hverju liði. Nemendur eiga að vinna undir tímapressu. Verkefni eru sett fram með raf- glærum (ppt) eða forriti sem býður uppá gagnvirk verkefni (t.d. www.kahoot.it).

Inngangsumferð – satt/ósatt?

- 1 Þvermál hrings stendur í öfugu hlutfalli við ummálið. (ósatt)
- 2 Fjöldi breskra punda stendur í réttu hlutfalli við fjölda íslenskra króna ef gengið er stöðugt. (satt)
- 3 Fallstæðan fyrir flatarmál hrings sem fall af geislanum myndar fleygboga. (satt)
- 4 Breiðbogi hefur tvo hlutferla. (satt)
- 5 Annars stigs fall hefur alltaf tvær núllstöðvar. (ósatt)

Fylgist með hver leiðir.

Önnur umferð – fjölvalsþurningar

- 1 Hvaða fall hefur ekki núllstöð?
 - a) $f(x) = 2x$
 - b) $g(x) = 2x^2$
 - c) $h(x) = \frac{2}{x}$
- 2 Hvaða fall gengur ekki gegnum upphafspunkt?
 - a) $f(x) = x^2 - 4x$
 - b) $g(x) = -4x$
 - c) $h(x) = x^2 - 4$
- 3 Hvaða fall hefur topppunkt?
 - a) $f(x) = 4x - 4$
 - b) $g(x) = 4 - x^2$
 - c) $h(x) = x^2 - 4$
- 4 Hvaða fall lýsir réttu hlutfalli?
 - a) $f(x) = 5x$
 - b) $g(x) = \frac{5}{x}$
 - c) $h(x) = \frac{5}{x} + 1$
- 5 Hvaða fall gengur ekki í gegnum punktinn (2, 4)?
 - a) $f(x) = x^2 - 2x + 4$
 - b) $g(x) = \frac{4}{x} + 2$
 - c) $h(x) = x^2 - 3x + 9$



Í stuttu máli

Blaðsíða 38–41

Ábendingar

Hægt er að vinna á mismunandi vegu með samantekt á námsmarkmiðum, dæmi og tillögur að lausnum í kaflanum *Í stuttu máli*. Nemendur geta lesið um hvert námsmarkmið ásamt dæmum og tillögum að lausnum. Þeir geta þá rætt um hugtök og skráð hjá sér minnispunkta um hvort þeim hafi þótt eitthvað erfitt eða hvort þá langar til að vinna meira með eitthvað í kaflanum *Bættu þig!* Nemendur ættu nú að fá tækifæri til að mynda sér skoðun á hvernig þeir standa gagnvart námsmarkmiðum kaflans. Það getur hjálpað þeim til að skipuleggja vinnuna í síðasta hluta kaflans.

Hér er möguleiki á að leggja fyrir áfangapróf til að kortleggja hvaða færni nemendur hafa til að bera eftir að hafa unnið um tíma með kafla 4 í *Skala 3B*.

Niðurstöðurnar geta leitt í ljós hvað hver nemandi hefur á valdi sínu og hvaða námsþætti í kafla 4 hann þarf að æfa frekar. Slíkt próf er ekki notað til að gefa nemendum einkunnir. Niðurstöðurnar geta bent kennaranum á hvernig fara skal með síðasta hluta kaflans. Ef þarf að leggja meiri áherslu á einstaka námsþætti í vinnunni framundan er hægt að velja slíka þætti úr *Bættu þig!*-síðunum í kafla 4.

Nú er hægt að gera yfirlit yfir hópa og einstaka nemendur til að ákveða hvernig fara ætti með lok kaflans. Endurgjöf til nemenda um áfangaprófið felur í sér ráðgjöf um hvað nemendur geta gert til að ná markmiðum kaflans. Nemendur geta sjálfir valið um frekari vinnu í *Bættu þig!* eða öðrum verkefnum út frá niðurstöðum áfangaprófsins.



Bættu þig!

Blaðsíða 42–43

Ábendingar

Nemendur velja verkefni sem henta til að ná markmiðum kaflans út frá niðurstöðum áfangaprófsins. Gerð er áætlun með nemendunum um hvað þeir þurfa að vinna sérstaklega með. Hver og einn nemandi getur líka gert áætlun og skilgreint hvaða markmið þarf sérstaklega að vinna að.

4.54–4.55

Við hefjum *Bættu þig!* með tveimur verkefnum um línuleg föll. Það getur verið að sumir þurfi enn að hressa upp á kunnáttuna.

4.56

Í lið a er vonast til að nemendur átti sig á að $h(0)$ er hæðin yfir vellinum sem spjótið er í þegar það fer úr hönd Hinriks.

Bls. 43

Föllin í verkefnum 4.57, 4.58 og 4.59 eiga eitthvað sameiginlegt. Ræðið það með nemendum áður en þeir hefja vinnu við verkefnin.

4.57

Gröf allra þessara falla hafa útpunkta á y -ásnum.

4.58

a og c hafa útpunkta á línunni $x = 5$ en b og d hafa útpunkta á línunni $x = -5$.

4.59

a og b hafa útpunkta á línunni $x = 1$ en c og d hafa útpunkta á $x = -1$.

4.60

Nemendur geta fundið skurðpunkta við y -ás án þess að leysa upp úr svingum. Það þarf aðeins að reikna $f(0)$, í a fáum við til dæmis:
 $f(0) = 1^2 - 2 = -1$.

4.61

Þessi föll eru rituð þannig að allt hefur verið leyst upp. Gott er að fylgjast með hvað nemendur gera og ræða við þá um hvernig þeir geti fundið eiginleika þessara annars stigs falla.



Ábendingar

4.63

Þetta verkefni þarf að vinna með teikniforriti. Ræða ætti um hversu réttmætt líkanið getur verið og nemendur hvattir til að velja skynsamlegt formengi.

4.64

Þetta verkefni ætti að vinna í höndunum. Nemendur þurfa að fá reynslu í að reikna út punkta og setja þá inn í hnitakerfið. Gæta þarf þess að þeir teikni samfellt sveigt graf og grafið verði ekki safn strika milli punktanna.

4.65

Nemendur kynna útskýringar sínar hver fyrir öðrum og þeir meta hvort skýringin er nákvæm og ótvíræð.

4.67

Ræðið hvað er sanngjarnt formengi fyrir fallið. Engin barnabörn koma ekki til greina og fleiri en 20 eru einkar sjaldgæf á Íslandi árið 2017. Fyrr á tímum og á öðrum menningarsvæðum getur fjöldinn hafa verið meiri en 20.

4.69

Það er ekki ólíklegt að algengt rangt svar hér sé $k = 3$ af því að nemendur eru vanir að leita að k í teljaranum. Ef nemandinn sér ekki að $k = \frac{3}{2}$ má ljóstra því upp en biðja hann að sýna fram á að

$$\frac{\frac{3}{2}}{x} = \frac{3}{2x}$$



Blaðsíða 46–47

Ábendingar**4.70**

Gott er að láta nemendur vinna verkefnið bæði með og án teikniforrits.

4.73

Hér gætu nemendur freistast til að teikna gröfin af $y = \frac{7000}{x}$ og $y = 500x$ í sama hnitakerfi af því að x táknar fjölda ökuferða í báðum tilvikum. Það sem nemendur sjá ekki er að kvarðarnir á y -ásnum eru mismunandi, nefnilega „krónur á ferð“ og „krónur“. Þegar teiknuð eru gröf er gerð krafa um skýra merkingu á ásunum. Þegar nemendur venja sig á að nota einingar á ásunum (ekki bara x og y) þar sem það er hægt, skapast meiri meðvitund um mismuninn í slíkum tilvikum.

4.74

Nemendur eiga að finna stæðuna $y = \frac{110}{x} + 4$. Það er mikilvægt að þeir átti sig á að hér er ekki um að ræða öfugt hlutfall.

4.75

Hér fáum við graf með fleiri brotum. Ef við notum teikniforrit verður að teikna grafið sem nokkur föll með mismunandi formengi.

4.76

Einhverjir nemendur kjósa að leysa verkefnið með því að prófa sig áfram. Þeir mega gjarnan gera það en við teljum að það ætti að hvetja þá til að fylgja liðum a, b, c og d.

Kaflaprófin

Nú geta nemendur tekið kaflapróf. Gefnar eru einkunnir fyrir kaflaprófin. Einkunnin og endurgjöf eru hér þáttur í símati á stöðu nemenda í þessum námsþætti.

Líkindareikningur

Nemendur kynna bæði fræðilegum líkindareikningi og líkum reiknuðum út frá tilraunum í þessum kafla. Nemendurnir eiga að læra að útbúa og framkvæma hermun til að geta fundið líkur í tilraunum sem geta tekið of langan tíma eða verið of dýrar til að gera. Þá útbúum við líkan af atburðinum með einföldum hjálpargögnum og framkvæmum tilraunina í þykjustunni. Teknar eru til umfjöllunar líkur á fleiri atburðum samtímis, líkur í mismunandi spilum eru greindar og metið hvort spilin séu réttlát. Kaflinn byggir beint á *Skala 2B*, kafla 5. Nemendurnir eiga að víkka skilning sinn á líkum yfir á ýmsar gerðir samsettra atburða. Við komum inn á margföldunarregluna, samlagningarregluna og andstæða atburði og nemendur fá tækifæri til að nýta forþekkingu sína í talningarfræði og flokkun gagna í talningartré, krosstöflu eða Vennmynd.

Forþekking

- Skilja og geta notað samhengið milli talna sem ritaðar eru á formi tugabrota, almennra brota og prósentna af heild
- Reikna með tugabrotum og almennum brotum
- Geta sett fram einfaldar líkur sem almenn brot, tugabrot og prósentu
- Geta reiknað einfaldar fræðilegar líkur í hversdagslegu samhengi
- Geta notað einfalda talningarfræði til að reikna fjölda samsettra atburða
- Geta notað Vennmynd, talningartré og krosstöflu til að flokka söfn

Fagleg tengsl

Líkindareikningur er fagsvið sem fæst við að nota talnaefni ásamt útreikningum til að finna hve líklegt sé að eitthvað eigi sér stað eða að margt eigi sér stað samtímis. Það er ekki alltaf hægt að reikna út fræðilegar líkur. Þá verðum við að reikna líkur út frá reynslu eða gera tilraunir til að afla reynslubundinna gagna. Þegar við vitum eitthvað um líkur í tilraun getum við beitt hermun.

5

Líkindareikningur

Blaðsíða 48–49

Hagnýt notkun

Líkindareikningur er oft notaður til að segja fyrir um atburði. Við tölum mikið í hversdagslífinu um líkur á að vinna sigur í leik, hvort strætisvagninum seinki eða hvort liðið okkar hafi sigur á mótinu. Líkindareikningi er beitt á mörgum fagsviðum til að vera viðbúin sérstökum aðstæðum eða til þess að forðast óhöpp. Þá er líkindareikningi beitt til að meta áhættu. Líkindareikningur er því mikilvægur og gagnlegur á mörgum sviðum til dæmis jarðfræði, veðurspáa, rannsókna, kauphallarviðskipta og lækninga.

Grundvallarfærni

Lestrarfærni

Lestur samsettra texta gerir þær kröfur til nemenda að þeir nýti sér alla þætti textans. Nemendur eru hvattir í kaflanum til að lesa sér til skilnings á líkindareikningi. Sýna þarf nemendum hvernig fagtexti, teikningar, skýringarmyndir og dæmi spila saman til að styðja við skilning á líkindahugtakinu. Nemendur læra að lesa töflur og túlka krosstöflu og Vennmyndir. Þeir lesa staðhæfingar sem þeir taka afstöðu til og þeir eiga að lesa og skilja sýnidæmi. Gefa ætti nemendum lestrarleiðbeiningar með fagtextum og skýringardæmum þannig að þeir lesi með tilliti til tiltekinna atriða þegar þeir þurfa að átta sig á textanum. Þeir ættu gjarnan að lesa upphátt og ræða saman í litlum hópum.

Munnleg færni

Lögd er áhersla á munnlega færni með því að beita námsamtölum um ný stærðfræðihugtök, fagtexta, skýringardæmi og verkefni. Námsamtöl geta verið stutt, fagleg samtöl, gjarnan afmörkuð í tíma þar sem nemendur eiga að ræða hugtak,

hluta úr kafla eða aðferð. Í kaflanum eiga nemendur að taka afstöðu til fullyrðinga, þeir eiga að lýsa því hvernig þeir geti fundið bæði fræðilegar líkur og líkur byggðar á tilraunum og útskýra líkur á mismunandi gerðum af samsettum líkum og andstæðum atburðum. Nemendur eru beðnir um að klæða hugsanir sínar í orð og nota faglegan orðaforða og hugtök í útskýringum sínum. Það styrkir námið.

Stafræn færni

Nemendur eiga að læra í kaflanum að nota stafræn verkfæri eins og töflureikni til að herma og telja niðurstöður úr tilraunum. Nemendur eiga að öðlast reynslu af að notkun töflureikna auðveldar vinnuna og gefur kost á að rannsaka mikið magn af gögnum.

Skrifleg færni

Nemendur þjálfu skriflega færni með því að orða uppgötvanir og deila ólíkum nálgunum og lausnaaðferðum sín á milli og með bekknum í heild. Nemendur gætu bæði skrifað hjá sér hugrenningar sínar og skrifað með tilliti til að koma hugmyndum sínum á framfæri við aðra. Þegar nemendur skrá hugsanir sínar er markmiðið að þeir ígrundi, fái hugmyndir og vinni sig í gegnum námsefnið. Þá beinast skriftirnar ekki að öðrum en nemandanum sjálfum. Nemendur læra í þessum kafla að skrá líkur á stuttan og samþjappaðan hátt með hjálp tákna. Nemendur hafa þörf fyrir þetta þegar þeir þurfa að taka tillit til að móttakandi skilji það sem þeir vilja koma á framfæri. Sýnidæmin sýna hvernig nemendur geta sett fram skriflegar lausnir.

Reikningsfærni

Reikningsfærnin þróast frá því að vera einfaldur prósentureikningur um einfalda atburði til þess að reikna líkur á samsettum atburðum. Nemendur þróa með sér reikniaðferðir og geta þróað áfram fleiri aðferðir við að deila með öðrum og útskýra hver fyrir öðrum hvernig þeir hugsa. Nemendur greina vandamál sem tengjast því að reikna líkur með og án skila, líkur á andstæðum aðgerðum og í mismunandi spilum.

Ábendingar

Stærðfræðiorð

Kennari ætti að láta nemendur ræða um stærðfræðiorðin og lætur þá finna merkingu þeirra orða sem þeir þekkja ekki. Útbúa hugarkort tengd einstökum hugtökum þar sem bekkurinn fær að stinga upp á tengingum við hugtökin. Hugarkort er hægt að útbúa og geyma til síðari nota í kaflanum þar sem stærðfræðiorðið kemur aftur fyrir. Fylgjast þarf með og taka eftir nemendum sem hafa misskilið hugtök. Verkefnablað 3.5.1. er tilvalið í vinnu með stærðfræðiorðin.

Könnunarverkefni

Verkefnið er sett fram til umræðu í pörum eða stærri nemendahópum. Hvað halda þeir um líkur á að verða tvisvar fyrir eldingu? Eru þær meiri, minni eða jafnmiklar og hjá þeim sem hefur aldrei orðið fyrir eldingu? Um frekara bakgrunnsefni um líkur á að verða fyrir eldingu sjá verkefnablað 3.5.2.

Einfaldari verkefni

Valverkefni: Líttu í kringum þig í bekknum. Áætlaðu líkur á að allir nemendur komi á réttum tíma í skólann á morgun. Eru líkurnar jafn miklar fyrir alla í bekknum? Með hverju getur þú rökstutt svarið?

Ef allir koma með sama strætó eða skólabíl er það kannski síður áhuga-vert verkefni en oftast er svolíttill breytileiki á hvernig nemendur koma sér í skólann. Við getum oft sagt út frá reynslu að það séu meiri líkur á að sumir komi of seint en aðrir. Það er dæmi um að líkur á að eitthvað muni eiga sér stað er hægt að rökstyðja með tölfræði yfir það sem þegar hefur átt sér stað.

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Hvað viltu velja?

Verkefnablað 3.5.1, sjá lýsingu á verkefninu á bls 42 í kennarabók: Upprifjun á líkindahugtakinu.

Faglegt innihald

- Upprifjun á fræðilegum líkum
- Líkur reiknaðar út frá tilraunum

Búnaður

- Nokkrir venjulegir spilastokkar
- Teningar
- Askja með teiknibólum

Frá reynslu til líkinda

Blaðsíða 50–51

Æfingahefti

5.1–5.3

5.8, 5.9

5.14

Ábendingar

Námsmarkmið

Kennari les og lætur nemendur ræða saman um námsmarkmiðin við námsfélaga. Það er afar mikilvægt að nemendurnir skilji hvað þeir eiga að læra. Þeir mega gjarnan ræða um hvaða merkingu þeir leggja í hugtökin tilraun og hermun. Nemendur gætu einnig velt fyrir sér merkingunni og skráð hjá sér í formi stikkorða.

Fagtexti

Kaflinn er kynntur með því að rifja svólítið upp um fræðileg líkindi sem voru kynnt í 9. bekk. Á þessari opnu könnun við mismuninn á fræðilegum líkum og líkum byggðum á tilraunum.

5.3

Hér eru ekki jafnar líkur. Svæðin sem eru samanlagt stærst ráða því hvort klókara sé að veðja á A eða B.

Sýnidæmi 1

Hér er sýnt hvernig er hægt að safna empírískum gögnum það er að segja gögnum sem fundin eru með athugunum á atburðum. Ef kostur er gætu nemendur sjálfir gert slíka athugun við umferðarljós í nágrenni skólans.

5.4

Hver nemandi þarf að hafa fjögur spil fyrir þetta verkefni: eitt lauf, einn tígul, einn spaða og eitt hjarta. Nemendur gætu unnið saman tvö og tvö og leyst lið b. Búin er til sameiginleg tafla yfir niðurstöður í bekknum, gjarnan í töflureikni. Heildarlíkur byggðar á tilraununum nálgast fræðilegar líkur meir og meir eftir því sem gerðar eru fleiri tilraunir (lög málið um stórar tölur). Lög málið um stórar tölur segir að sé gerð röð tilrauna sem allar eru eins muni

hlutfall tiltekinnar útkomu nálgast tiltekið gildi, markgildi.

	Nem. 1	Nem. 2	Nem. 3
♥			
♣			
♦			
♠			

Grundvallarfærni

Nemendur vinna saman og útskýra hver fyrir öðrum hvernig þeir hugsa. Þeir sitja saman og leysa verkefni 5.1–5.4 í sameiningu, gjarnan munnlega í fyrstu. Æfa þarf hinn knappa og nákvæma rithátt

$$P(\text{atburður}) = \frac{\text{fjöldi hagstæðra útkoma}}{\text{fjöldi mögulegra útkoma}}$$

fyrir sýnidæmi $P(\text{grænn}) = \frac{1}{3}$. Nemendur ræða saman, færa fram rök, verða sammála og skrá hjá sér svörin í bækur sínar. Kennari og nemendur lesa saman fagtextann, reglur og orðskýringar á spássium þannig að nemendur hafi tækifæri til að spyrja og fá útskýrð orð eða hugtök sem þeir skilja ekki. Æfa þarf hvernig lesið er úr rithættinum fyrir líkur. Í sýnidæminu er lesið úr $P(\text{grænt}) = \frac{1}{3}$ þannig að „líkurnar á grænu (ljósi) eru einn þriðji.“

Einfaldari verkefni

Nemendur sem þurfa á því að halda geta notað áþreifanlega hluti svo sem tening, spilastokk eða teiknað mynd sem sýnir allar mögulegar útkomur sem geta komið fyrir.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Gangbraut

Gerðu tilraun til að sjá hvort bílarnir stoppa þegar þið ætlið að fara yfir götu á gangbraut. Skráið niðurstöðurnar í sameiginlega töflu. Gerið 20–30 tilraunir.

Atburður	Tíðni
Stoppar	
Stoppar ekki	

Nemendur eru spurðir:

- *Hvaða líkur eru á að bíll stoppi næst þegar nemandi kemur að gangbraut?*

Teiknibólukast

Það þarf öskju með eins teiknibólum. Hver þriggja nemenda hópur fær tíu teiknibólur. Kastið teiknibólunum upp í loft og látið þær lenda af handahófi á borðið. Hver teiknibóla getur legið á tvo mismunandi vegu:

með slétta flötin niður og pinnan upp og þar sem hún liggur á hlið slétta flatarins með pinnan skáhallt niður og oddinn í borðið.

Hver hópur gerir tíu tilraunir með tíu köst í hvert skipti. Samanlagt hafa þá verið gerð allt að 1000 köst.

Nemendur eru spurðir:

- *Hve miklar líkur eru á að næsta teiknibóla sem kastað er lendi með oddinn upp? Hvers vegna er mikilvægt að allar teiknibólurnar séu eins?*

Faglegt innihald

- Líkur reiknaðar út frá tilraunum

Búnaður

- Einn teningur á hvern nemanda í bekknum
- Blöð og trélitir
- Bréfa-klemmur
- Tennisbolti/svampur eða baunapoki/húlahringur/fata
- Gular og grænar baunir

Blaðsíða 52–53

Æfingahefti

5.4

5.10

5.15

Ábendingar

Þrjú verkefni og eitt sameiginlegt verkefni sem vinna þarf eru á opnunni. Ef ekki er tími til að vinna öll verkefnin er hægt að skipta bekknum í þrjá hópa þar sem hver hópur vinnur eitt verkefnanna þriggja á blaðsíðunni.

5.6

Tilraunina ætti að gera í sameiningu í hópum með þremur til fjórum nemendum. Fjöldi miða í mismunandi litum er haldið leyndum fyrir nemendum og þeir geymdir í ógegnsæju boxi.

5.7

Nemendur setja blýant inn í bréfa-klemmu á teikninguna í bókinni til að framkvæma tilraunina. Þeir gætu líka teiknað skífuna í vinnubók sína. Þeir geta unnið nokkrir saman.

Ýmis verkefni - Réttent eða örvhent?

Ætlunin með þessu verkefni er að safna gögnum um mismun á hæfni til að kasta af nákvæmni með hægri og vinstri hendi. Velja þarf hve nálægt nemendurnir eiga að standa. Það er mikilvægt að það sé hæfileg fjarlægð svo að hittnin verði töluverð. Ef notaður er tennisbolti eða svampur þarf boltinn/svampurinn að vera blautur þannig að hann skilji eftir merki á töfluna. Þá er auðvelt að ákveða hvort skotið hafi hitt eða ekki.

Grundvallarfærni

Munnleg færni er mikilvæg í öllum samstarfsverkefnum. Nemendur þurfa að vinna saman og tala um það sem þeir sjá og það sem þeir komast að um líkur byggðar á tilraunum. Nemendur ættu að æfa sig í að skrifa og lesa knappa táknmálsritháttinn.

Einfaldari verkefni

Nemendur sem fá að afla sér reynslu af líkum og ræða þær öðlast betri skilning á efninu. Nemendur þurfa að vinna saman og útskýra hver fyrir öðrum hvað og hvernig þeir skilja efnid. Það ætti að láta þá skýra út hver fyrir öðrum það sem þeir hafa séð í tilrauninum og hvað líkur byggðar á tilraunum sýna fram á.

Einföldustu tilraunirnar eru þær sem hafa bara tvær útkomur. Notið til dæmis perlur, talningarkubba eða gular og grænar baunir. Fyllið box með mörgum einingum þar sem skiptingin er um það bil 30-70. Nemendur draga tíu sinnum með skilum, þrjátíu sinnum með skilum, fimmtíu sinnum með skilum. Boxið er hrist og blandað vel milli dráttu. Hlutfallsleg tíðni litanna tveggja er reiknuð í hverri tilraun.

- Líkjast tölurnar?
- *Eru tvær síðustu tölurnar nær hvor annarri en tvær þær fyrstu? Ef svo er, hvers vegna?*
- *Hve miklar líkur eru á að næsta baun sé græn?*
- *Hvaða svar er svo gjaldgengast? Er hægt að reiða sig á þessa tölu?*

Markmiðið er að nemendur skilji

- að hlutfallsleg tíðni atburða sem hafa átt sér stað segir fyrir um líkur á næsta atburði
- að hlutfallsleg tíðni segir ekki endilega sannleikann heldur er það nálgunargildið sem meiri víska verður um eftir því sem fleiri tilraunir eru gerðar (lög má stórra talna)

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Hittir þú í ruslafötuna?

Verkefni fyrir fjóra – sex nemendur. Búnaður: Ruslafata, krít, pappírslað

Setjið ruslafötuna á gólfið. Tveimur metrum frá er teiknaður hringur utan um ruslafötuna með krít. Nemendur raða sér á krítarhringinn. Einn þeirra skráir í töflu hve mörg köst hitta og hve mörg lenda utan við. Hver nemandi vöðlar blaði sínu saman í bolta og reynir að hitta í ruslafötuna með betri hendi sinni. Hver nemandi fær fimm köst. Reiknið út líkur byggðar á tilrauninni á að hópurinn hitti með betri hendinni og síðan með hinnu hendinni. Ræðið mismun á niðurstöðum. Er um nokkrar kerfisbundar villuorsakir að ræða?

Kanínutalning

Umsjónarmaður umhverfismála vill átta sig á hve margar kanínur eru á eyju nokkurri. Fyrst fangar hann af handahófi tuttugu kanínur sem hann merkir og sleppir aftur lausum. Viku síðar reiknar hann með að kanínurnar hafi hlaupið um eyjuna og blandast vel. Þá fangar hann aftur tuttugu kanínur. Það sýnir sig að fjórar þeirra eru merktar. Hve mörgum kanínum getur umsjónarmaðurinn reiknað með á eyjunni?

Faglegt innihald

- Líkur reiknaðar út frá tilraunum
- Hermun

Búnaður

- Körfuboltar
- Smápeningar
- Eldspýtustokkar
- Spilastokkar
- Pappír og trélitir
- 10-hliða verpill eða skífa með 10 reitum
- Verkefnablað 3.5.4

Blaðsíða 54–55

Æfingahefti

5.5

5.11

Ábendingar

Á bls. 54 eru tvö verkefni sem krefjast tilrauna, 5.9 og 5.10. Þá er gott að skipta bekknum þannig að nokkrir nemendur geri tilraunir með vítaskot í körfu og aðrir varpa eldspýtustokkum. Eftir á geta hóparnir útskýrt hverjir fyrir öðrum hvað þeir hafa fundið. Þegar þeir skýra út og koma orðum að því sem þeir hafa fundið átta þeir sig á hvort þeir hafa skilið efnið.

Það eru margar leiðir til að útbúa einfaldar hermanir. Í þessum kafla munum við leita leiða til að nota smápeninga, teninga, verpla, spilastokka, pappírsmiða, kúlur og töflureikni til að útbúa hermun.

5.8

Hér mætti ræða hvaða þættir geta haft áhrif á hvort Lína getur haldið frestinn eða ekki. Hvernig getur hún skráð og raðað skráningum ef markmiðið er að finna fyrirkomulag sem dregur úr líkum á seinkaðri afhendingu?

5.9–5.10

Sjá almennar athugasemdir um að skipta bekknum í hópa eins og að sumir leysi verkefni 5.9 á meðan aðrir leysa verkefni 5.10.

Sýnidæmi 2

Hér lítum við á allar mögulegar raðanir. Þær niðurstöður sem fullnægja kröfunni eru að köstin þrjú gefi eitt af þrennu, DDS, DSD, eða SDD. Kennari ætti að láta nemendur gera tilraunina áður en þeir lesa sýnidæmið. Þeir vinna þá saman tveir og tveir, kasta upp peningi og skrá niðurstöðurnar í tíu tilraunum hver (með þrjú köst). Svo er gerð sameiginleg tafla og líkurnar byggðar á tilrauninni bornar saman við sýnidæmið. Nemendur eru látnir

finna fræðilegar líkur á systkinahóp með tveimur drengjum og einni stúlku og bera saman líkurnar byggðar á tilrauninni og fræðilegu líkurnar. Nemendur eru spurðir:

- *Hvernig er samhengið milli líkindanna sem byggð eru á tilrauninni og fræðilegu líkindanna?*

Kannski gera nemendur fleiri tilraunir en í sýnidæminu.

Þá eru þeir spurðir:

- *Voru fræðilegu líkurnar og líkurnar sem byggðust á tilraununum nær hvor annarri í okkar tilvik?*
- *Hvað verður um samhengið milli líkinda byggðum á tilraunum og fræðilegu líkindanna þegar við fjölgum tilraununum verulega?*

5.11

Skorprósenta upp á 75 er sama og $\frac{3}{4}$. Það er að segja að við getum notað fjögur spil þar sem þrjú þeirra merkja að hitt hafi verið í körfuna og eitt að skotið sé framhjá. Spilin geta verið í einum af fjórum litunum hjarta, tígull, lauf og spaði.

5.12

Nemendur geta notað tíu miða til að líkja eftir gangbrautarljósum, þrjú græna og sjö rauða. Miðunum er alltaf skilað til baka áður en dregið er aftur. Nemendur gera einfalda töflu til að safna saman niðurstöðum eins og í sýnidæmi 2.

Athugun	Skráning	Tíðni
Fullnægir kröfu		
Fullnægir ekki kröfu		

Grundvallarfærni

Nemendur eru látnir koma orðum að því sem þeir hafa gert og því sem þeir hafa skilið. Þeir átta sig á hvað þeir kunna hugsanlega ekki þegar þeir eiga að segja frá og skýra fyrir öðrum. Þeir gera það gjarnan í minni hópum. Nemendur æfa sig í að skrifa og lesa knappa líkindareikningsrit-háttinn með táknaði.

Einfaldari verkefni

Nemendum er hjálp í að nota smápeninga, teninga eða annan búnað til að gera tilraunirnar áþreifanlegar og líkindareikningurinn verður hlutbundnari. Samvinna og munnlegar útskýringar sem nemendur bæði gefa og fá eru mikilvægar til að fá eigin skilning staðfestan.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Bæjarferð - Spil

Sjá lýsingu á bls. 40 í kennarabók. Notið spilabrettið á verkefnablaði 3.5.4

Faglegt innihald

- Hermun

Búnaður

- Tveir teningar í mismunandi litum
- Miðar eða kubbar í mismunandi litum
- Smápeningar eða spil

Blaðsíða 56–57

Æfingahefti



Ábendingar

5.13

Gott er að finna veðurspá fyrir viðkomandi svæði á ákveðnum tíma, fyrir næstu þrjú daga t.d. á vedur.is. Skráið hjá ykkur veðurspána. Finnið veðurlýsingu næstu daga og berið saman við spánna. *Var spáin nákvæm fyrir dag 1? Hversu nákvæm var spáin fyrir dag 2 og dag 3? Hversu trúverðugar eru langtímaspár?*

5.14

Nemendur þurfa helst einhvern einfaldan búnað til að vinna hermunina: smápening, kubb, spil, tening eða önnur einföld hjálpartæki.

Ýmis verkefni - Hermun:

Steinn, skæri og blað

Til skemmtunar í umræðunni um hvort spil sé réttlátt eða hvort það sé bara tilviljun háð hver vinnur eru skipulögð ÍM (Íslandsmeistaramót) og EM (Evrópumeistaramót) í Steinn, skæri og blað. Það felur í sér að einhver geti orðið mjög góður í því. Nemendur eru spurðir:

- *Hvernig er hægt að verða mjög góður í Steinn, skæri og blað?*

Grundvallarfærni

Nemendur vinna saman og rökræða hvernig sé hægt að útbúa hermunina. Þeir skrá hjá sér niðurstöður hermunarinnar og reikna út líkur á grundvelli hennar. Nemendur skrá líkurnar á knappasta mögulega hátt með táknmáli.

Einfaldari verkefni

Nemendur fá vísbendingu:

- *Hvað gerist ef þú velur alltaf það sama í hvert skipti en mótleikarinn velur af handahófi?*

Við getum útskýrt að Steinn, skæri, blað er réttlátt spil með eftirfarandi röksemdafærslu: Ég ákveð að velja skæri í hvert skipti. Mótleikarinn leikur alveg af handahófi. Þá mun hann velja skæri í 1/3 skiptanna, stein 1/3 skiptanna og blað 1/3 skiptanna, og það merkir fyrir mig að útkljáð, tap og vinningur skiptist jafnt, 1/3 hvert um sig. Sama röksemdafærsla gildir, óháð því hvað ég vel að veðja á. Þá skiptir heldur engu máli hvað ég vel af handahófi. Svo má spyrja um hve tilviljunarkennt það sé í raunveruleikanum eða hvort viðbragðstækni (taktík), líkamstjáning og undirmeðvitund geti leikið eitthvert hlutverk.

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Hermun á úrslitum í fótbolta

Hér er staðan í Olís-deild karla í handbolta í byrjun ársins 2017 eftir 16 umferðir (gott er að finna nýjustu stöðuna í fótbolta, handbolta eða öðrum hópíþróttum).

Í töflunni þýðir *L* fjöldi leikja, *U* fjöldi unninna leikja, *J* fjöldi jafntefla og *T* fjöldi tapleikja.

Sæti	Lið	L	U	J	T
1	Afturelding	16	11	2	3
2	Haukar	16	11	0	5
3	FH	16	7	4	5
4	Valur	16	9	0	4
5	Selfoss	16	8	0	8
6	ÍBV	16	7	2	7
7	Fram	16	6	1	9
8	Akureyri	16	4	3	9
9	Grótta	16	5	1	10
10	Stjarnan	16	4	3	9

Veljið lið og útbúið hermun sem lýsir því hvernig mestar líkur eru á að næsti leikur fari. Hve miklar líkur eru á að liðið sigri, geri jafntefli eða tapi? Notið gjarnan miða. Útskýrið hvernig hermunin er gerð. Hermið eftir úrslitum fimm næstu leikja þessa liðs.

Faglegt innihald

- Stafræn hermun

Búnaður

- Tölva
- 100-200 teningar

Æfingahefti

● 5.6, 5.7

● 5.12, 5.13

● 5.16-5.19

Blaðsíða 58–59

Ábendingar

Sýnidæmi 3

Það eru til nokkrar mismunandi leiðir til að framkalla slembitölu. $=\text{RAND}()$ skilar tugabroti milli 0 og 1. Þegar við margföldum tugabrotið með tiltekinni tölu getum við stillt af talnasviðið fyrir valið svið af ræðum tölum.

Sýnidæmi 4

Þegar líkja skal eftir einhverju og nota á mismunandi heilar tölur sem líkan af atburði er einnig hægt að nota aðrar formúlur í töflureikninum. Dæmi um það er formúlan $=\text{RANDBETWEEN}(\text{botn};\text{topp})$. Í þessu dæmi væri það þá $\text{RANDBETWEEN}(0;1)$.

Einnig má nota töflureikninn í GeoGebra í hermun. Þá er formúlan til að herma eftir heilli tölu Slembitala-Millií $\langle \text{Neðri mörk heiltölu} \rangle$, $\langle \text{Efri mörk heiltölu} \rangle$. Þessi formúla dregur út með slembivali heiltölu milli ytri gildanna tveggja sem sett eru inn í formúluna. Í sýnidæminu hér væri formúlan $\text{SlembitalaMilli}[0, 2]$. Töflureiknirinn í GeoGebra reiknar líka upp á nýtt ef ýtt er á F9.

5.15

- Hér má nota formúluna $=\text{INT}(\text{RAND}()*6)$.
- Hér má nota formúluna $=\text{INT}(\text{RAND}()*6)+1$.
- Hér má nota formúluna $=\text{INT}(\text{RAND}()*2)$, þar sem við notum 0 fyrir rakka og 1 fyrir tík.

5.16

Hér má nota formúluna $=\text{INT}(\text{RAND}()*10)$.

5.17

Hér má nota formúluna $=\text{INT}(\text{RAND}()*6)+1$.

5.18

Hér má nota formúluna $=\text{INT}(\text{RAND}()*2)$, þar sem við notum 0 fyrir dreng og 1 fyrir stúlku.

5.19

Hér gætu nemendur hugsað stuttlega hver fyrir sig, metið mismunandi kosti og myndað sér skoðun á því sem spurt er um. Síðan ræða þeir saman um málið tveir og tveir. Þeir eru beðnir um að færa rök og útskýra hugsanir sínar hvor fyrir öðrum. Nokkrir fá að koma fram fyrir hópinn með hugmyndir sínar og skoðanir. (Aðferðin er kölluð EHB - einstaklingur, hópur, bekkur. Aðferðin er mjög gagnleg fyrir nemendur í mörgum námsaðstæðum. Allir fá þá nægan tíma til að hugsa og fínstilla röksemdir sínar og nemendur verða öruggari með sig og eiga léttara með að segja frá fyrir framan allan hópinn).

Allir nemendurnir hafa rétt fyrir sér í þessu verkefni en svarið við spurningunni um hvaða mismun voru mestar líkur á að fá er mismunurinn 1. Gott er að gera yfirlit yfir alla 36 fræðilegu möguleikana á því hvaða tölur hægt er að fá upp á tveimur teningum. Síðan er talið hve margir möguleikar eru á að fá mismunina 0, 1, 2, 3, 4 og 5.

Grundvallarfærni

Hér er notað stafrænt verkfæri til að gera margar hermanir á skömmum tíma. Töflureiknir getur framkvæmt þúsundir drátta og talninga á skömmum tíma. Það er gagnlegt að kynnst því hvernig nota má töflureikninn til að spara tíma.

Einfaldari verkefni

Þegar nemendur vinna við hermun með töflureikni er heppilegt að sitja saman tvö og tvö. Þá geta nemendur

rökrætt og afgreitt hugsanlega óljós atriði á meðan á vinnunni stendur.

Þeir verða líka að koma orðum að því sem þeir skilja til að geta útskýrt hver fyrir öðrum.

Faglegt innihald

- Líkur á nokkrum atburðum samtímis
- Margföldunarreglan

Búnaður

- Lítil spjöld með þríhyrningum og hringjum, verkefnablað 3.5.5
- Sex hliða teningur og tíu hliða verpill

Samsettar líkur, margir atburðir

Blaðsíða 60–61

Æfingahefti

5.20-5.23

5.37-5.39

5.54-5.57

Ábendingar

Námsmarkmið

Kennari les með nemendum og fær þá til að ræða um námsmarkmiðin með námsfélaga. Það er mjög mikilvægt að nemendur skilji hvað þeir eiga að læra. Þeir mættu gjarnan ræða forskilning sinn á hugtökunum atburður, dráttur og andstæður/fyllimengi og skrá hjá sér stikkorð um hvað þeir kunna frá fyrri tíð.

Fagtexti

Hér er leidd út margföldunarreglan sem líka er nefnd margfeldisregla. Hún segir til um líkur á að tveir óháðir atburðir eigi sér stað samtímis. Verkefnið er unnið með litlum spjöldum sem á eru þríhyrningar og hringir. Verkefnablað 3.5.5 er notað. Nemendur eru látnir búa til fleiri verkefni fyrir fagtextann á bls. 60. Þeir finna samsettar líkur með margfeldisreglunni, til dæmis:

- Hve miklar líkur eru á að draga rauðan þríhyrning úr flokki 1 og rauðan hring úr flokki 2?
- Hve miklar líkur eru á að draga bláan þríhyrning úr flokki 1 og rauðan hring úr flokki 2?

Sýnidæmi 5

Hér er spurningunni um líkur á að tveir óháðir atburðir eigi sér stað samtímis svarað með aðstoð margfeldisreglunnar.

5.22

Hér er fengist við undirbúning að vinnu með andstæða atburði sem hefst á bls 65 í kaflanum. Nemendur eru beðnir um að skoða töfluna með verkefni 5.22.

Grundvallarfærni

Það að lesa fagtextann um margfeldisregluna með dæminu um þríhyrningana og hringina krefst þess að nemendur lesi og túlki saman texta, formúlur og myndir. Margir nemendur þurfa að æfa sig á að lesa og skrifa líkur með táknmáli. Æfið til dæmis að lesa $P(\text{blár}_1) = \frac{2}{3}$ sem „líkurnar á bláu í flokki 1 eru tveir þriðjuhlutar“.

Einfaldari verkefni

Nemendur vinna saman tveir og tveir með spjöldin á verkefnablaði 3.5.5 sem á eru hringir og þríhyrningar. Þeir leggja spjöldin niður þannig að myndahliðin snúi upp og skoða þau um leið og þeir lesa fagtextann á bls. 60. Við það að flokka spjöldin virkjast nemendur þannig að skýringin í textanum verður studd af þessum áþreifanlegu hlutum og veitir þannig betri skilning.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Kast með tveimum teningum

Nemendur nota tvo 6-hliða teninga. Þeir finna líkur á að fá

- sexur á báða teningana
- tvær sléttar tölur
- tvær frumtölur
- tölur hærrí en 2 á báða teninga
- tölu lægri en 4 á fyrri teninginn og tölu hærrí en 4 á hinn teninginn (einum teningi varpað í einu)

Notið tíu-hliða verpill (með tölur frá 0 til 9) og finnið samsvarandi líkur og með sex-hliða teningunum. Gott er að búa til krosstöflu sem sýnir allar mögulegar niðurstöður úr kóstunum tveimur.

Lausnir fyrir sex-hliða teninga:

$$P(\text{sexur á báða teninga}) = \frac{1}{36}$$

$$P(\text{tvær sléttar tölur}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{tvær frumtölur}) = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{tölur hærrí en 2 á báðum teningum}) = \frac{4}{9}$$

$$P(\text{tala lægri en 4 á fyrri teningnum og tala hærrí en 4 á hinum teningnum}) = \frac{2}{9}$$

Að standast „satt eða ósatt“-próf

Búið til mynd sem sýnir líkur á að fá allt rétt á „satt eða ósatt“-prófi með tíu spurningum þegar „grísað“ er á hvert svar.

Lausn:

Gott er að nota líkindatré.

$$P(\text{allt rétt}) = \frac{1}{1024} = \frac{1}{2^{10}} = 0,098\%$$

Faglegt innihald

- Dráttur með og án skila
- Háðir og óháðir atburðir

Búnaður

- Spilastokkar
- Teningar
- Smápeningar
- Kúlur í mismunandi litum

Æfingahefti

● 5.24-5.28

● 5.40-5.53

● 5.58-5.60

Blaðsíða 62–63

Ábendingar

Dæmin sýna mismun á drætti með og án skila. Útskýrið dæmin í sameiningu. Gott er að dreifa spilum og láta nemendur vinna dæmin saman í pörum áður en þeir lesa þau. Nemendur fá þá betri skilning á að líkurnar á að draga spaða í annað skipti eru hinar sömu og í fyrra skiptið ef þeir skila spilinu í stokkinn. Á sama hátt öðlast þeir betri skilning á því að það verður einu spili færra af mögulegum spilum í formúlunni $P = \frac{\text{hagstæðar}}{\text{mögulegar}}$ ef spili úr fyrri drætti er ekki skilað.

Sýnidæmi 6 og sýnidæmi 7

Nemendur vinna dæmin, sjá hér að framan. Í sýnidæmi 6 munu nemendur komast að raun um að útkoman úr atburði 2 er óháð atburði 1. Í sýnidæmi 7 munu nemendur komast að raun um að útkoman úr atburði 2 er háð atburði 1.

5.23

Umræður gera það að verkum að viðfangsefni skýrast og varpa ljósi á hugtakaparið háður/óháður. A og C sýna óháða atburði, B og D sýna háða atburði.

5.24

Gott er að nota þrjár kúlur og gera tilraunina í raun eða nota liti og teikna viðfangsefnið. Gera þarf nemendum ljóst að röðin skiptir hér máli. Blá-gul-gul er ekki sama og gul-blá-gul.

5.25

Nemendur ættu að nota sex spjöld þegar þeir leysa verkefnið.

5.26

Hér ætti að nota liti og teikna viðfangsefnið.

5.27

Nemendur verða að vita að í spila-stokk eru 13 spil í hverjum lit (spaða, laufi, tígli og hjarta), að í stokknum eru 12 mannspil og að það eru fjögur spil með hvert gildi (fjarkar, níur, drottningar, kóngar, ásar o.s.frv.).

Grundvallarfærni

Kennari les skýringardæmi og reglur. Hann ræðir orðskýringar til hliðar og ræðir um hvernig skilja beri hin ólíku stærðfræðiorð. Verkefni 5.23 krefst umræðna um háða og óháða atburði. Slíkar umræður geta skýrt hugtök með aðgengilegum hætti fyrir nemendur.

Einfaldari verkefni

Alls staðar þar sem hægt er að gera verkefnið ápreifanleg með spilum, smápeningum, kúlum og því um líku ætti að nota slíka hluti. Að öðrum kosti getur verið mjög gagnlegt að draga upp mynd af aðstæðum með teikningu. Nemendur ættu að vinna saman í pörum. Þá munu umræður skipta máli og samvinnan við að leysa verkefnið getur leitt til meiri áhuga og árangurs.

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Satt eða ósatt

Við erum með fimm rauðar, þrjár bláar og tvær hvítar kúlur í krukku.

- A Líkurnar á að draga tvær rauðar kúlur hvora á eftir annari þegar fyrri kúlunni er ekki skilað til baka eftir dráttinn eru $\frac{1}{9}$.
- B Líkurnar á að draga tvær hvítar kúlur hvora á eftir annari þegar fyrri kúlunni er skilað áður en hin er dregin eru 0,04.
- C Það eru jafnmiklar líkur á að draga þrjár rauðar kúlur hverja á eftir annari eins og á að draga tvær rauðar kúlur og síðan bláa kúlu án skila.

Faglegt innihald

- Andstæðir atburðir/fylliatburðir

Búnaður

- Teningar
- Hringur úr snæri eða krít

Æfingahefti

5.29

5.44

5.61

Blaðsíða 64–65

Ábendingar

Ýmis verkefni - Kasta grís

Markmiðið með spilinu er að meta líkur á að fá upp einn. Hve lengi þorir þú að kasta áður en þú heldur að líkurnar á að fá upp einn séu svo miklar að þú eigir að stoppa og safna saman stigunum sem þú ert búin(n) að fá fram að þessu?

Sýnidæmi 8

Hér notum við eiginleika andstæðra atburða. Samanlagt fylla þeir upp allt útkomumengið, það er að segja að summa líkindanna fyrir andstæðu atburðina er 1. Við sjáum þá að $P(B \text{ eða } C) = 1 - P(A)$. Við lesum: „Líkurnar á að Markús sé í hóp B eða C er 1 mínus líkurnar á að hann sé í hóp A.“

Grundvallarfærni

Nokkrar ólíkar gerðir texta eru á opnunni. Það krefst tíma og einbeitingar að lesa samsetta texta með fagtexta, reglum í römmum, orðskýringum, talbólum, sýnidæmum og spilarreglum. Nemendur ættu að vinna úr því sem þeir lesa með því að þeir útskýri hver fyrir öðrum hvað þeir hafa skilið. Að koma orðum að eigin skilningi veitir dýpra nám.

Einfaldari verkefni

Andstæða atburði má einnig skoða sem viðburð með tveimur útkomum. Önnur er sú að eitthvað gerist, hin að það gerist ekki. Hugsa má sér að kannað sé hvort nemendur hafa borðað eða ekki borðað morgunmat. Þessir tveir atburðir eru andstæðir: $P(\text{nemendur hafa borðað morgunmat}) + P(\text{nemendur sem hafa ekki borðað morgunmat}) = 1$. Gjarnan má nota hring úr snæri eða teikna hring á gólfíð með krít. Allir nemendur með sítt hár eru beðnir um að ganga inn í hringinn. Þá er fyllimengið með andstæða

atburðinum allir nemendur með stutt hár. Þar sem stendur L eru þeir með síða hárið og þar sem er \bar{L} eru þeir með stutt hár.



Nemendur sem hafa þýsku sem þriðja erlent tungumál ganga inn í hringinn. Þá eru í fyllimenginu þeir nemendur sem hafa ekki þýsku. Mengið T er mengi þeirra sem hafa þýsku sem þriðja erlent tungumál og \bar{T} er mengi þeirra sem hafa ekki þýsku sem þriðja erlent tungumál.

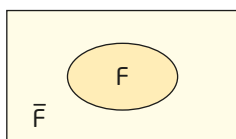


Teljið saman mengin tvö hvort fyrir sig og samanlagt hljóta þau að innihalda alla nemendur í bekknum.

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Andstæðir atburðir

Vinnið saman tvö og tvö og rökræðið. Finnið fimm andstæða atburði sem eiga við nemendur í bekknum. Atburðirnir geta sem sagt ekki átt sér stað samtímis, til dæmis: „þeir sem hafa borðað morgunmat (F) og þeir sem ekki hafa borðað morgunmat (\bar{F}).“ Gerið myndir sem sýna andstæðu atburðina sem þið hafið fundið. Spyrjið nemendur í bekknum og finnið hve stórt hvort mengi er. Munið að samanlagt verða mengin tvö að ná yfir alla í bekknum.



Á Vennmyndinni er F þeir sem hafa borðað morgunmat og \bar{F} þeir sem ekki hafa borðað morgunmat.

Blaðsíða 66–67

Faglegt innihald

- Líkur á andstæðum atburðum
- Notkun krosstöflu og Vennmyndar

Búnaður

- Smápeningar
- Teningar
- Rökkubbar

Ábendingar**Sýnidæmi 9**

Kennari ræðir við nemendur um orðanotkun í dæminu. Orðasambandið „að minnsta kosti eina sexu“ þýðir í þessu tilviki eitt af þessu: ein, tvær eða þrjár sexur. Það þýðir að þú getur fundið líkur á að finna að minnsta kosti eina sexu á einfaldari hátt heldur en að leggja saman líkur á að fá eina sexu, tvær sexur og þrjár sexur. Þú getur sem sagt fundið andstæðu líkurnar, líkur á andstæða atburðinum, að fá ekki neina sexu.

5.28–5.29

Andstæða atburði má einnig kalla fylliatburði. Summan af líkum á fylliatburðunum tveimur er jöfn 1.

5.30

Í b-lið verða nemendur að vita að 26 af 52 spilum í spilastokk eru rauð.

Sýnidæmi 10

Hér tókum við til athugunar tvo atburði þar sem útkomur skarast. Það er að segja að það er ekki annað hvort – eða eins og fá upp sexu eða ekki, heldur að báðir atburðir geta átt sér stað samtímis eins og til dæmis að eiga bæði hund og kött. Hægt er að setja upplýsingarnar skýrt fram með Vennmynd.

5.32

Krosstöflu er hægt að nota þegar athuga á atburði sem geta átt sér stað í þorum.

5.33

Sjá Vennmynd í sýnidæmi 10.

Grundvallarfærni

Hér eiga nemendur að lesa og túlka texta til að geta reiknað líkur á andstæðum atburðum. Orðasambandið „að minnsta kosti“ vísar til þess að finna líkur á andstæða atburðinum við að atburður eigi sér ekki stað.

Einfaldari verkefni

Þegar atburður er raðað inn í krosstöflu, líkindatré eða Vennmyndir verður á vissan hátt áþreifanlegra og einfaldara fyrir nemendur að sjá aðstæður fyrir sér og reikna út líkur á því að eitthvað tiltekið muni eiga sér stað. Nemendur geta unnið saman að því að túlka texta verkefnanna og setja upplýsingar inn í myndrit.

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni**Notkun rökkubba**

Nú ætti að draga fram rökkubbana. Kubbarirnir eru úr plasti og eru mismunandi að lögun, stærð, lit og þykkt. Veljið út kubba og flokkið þá í Vennmynd, til dæmis alla rauða kubba í A menginu og alla þríhyrnda kubba í B menginu.

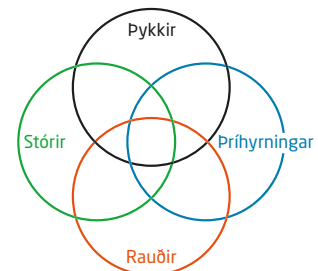


Verkefni úr líkindareikningi eru útbúin með tilliti til þess sem valið var:

- *Hve miklar líkur eru á að velja rauðan þríhyrning?*

Kennari sýnir hvernig hægt er að setja fram val með tilliti til þriggja eiginleika með þremur hringjum:

rauðir/ekki rauðir, þykkir/þunnir og þríhyrningar/ekki þríhyrningar. Bætið við fjórða eiginleikanum, stór/lítill. Nemendur prófa að setja fram mynd með fjórum hringjum sem flokka eftir þessum forsendum. Það er ekki hægt. Það geta nemendur fengið sjálfir að reyna.



Á þessari mynd er hvergi pláss fyrir kubba sem er rauður, þykkur, hringur og lítill.

Faglegt innihald

- Notkun krosstöflu, Vennmyndar og líkindatrés
- Líkur í spilum

Búnaður

- Spilastokkar
- Smápeningar
- Teningar
- Kubbar/pinnar eða annað til talningar

Blaðsíða 68–69

Æfingahefti

5.32-5.34

5.49-5.51

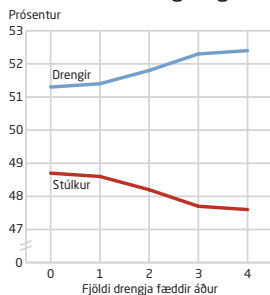
5.65-5.69

Ábendingar

Í talbólunni er rætt um orðið „eða“ milli tveggja atburða í líkindareikningi (dæmi 5.34). „Eða“ merkir hér allar útkomur í sammenginu. Á Vennmynd er þá átt við atburði innan annars hvors mengisins eða í sniðmenginu það er að segja atburð sem tilheyrir báðum mengjunum.

5.37

Í raunveruleikanum er ekki jafn líklegt að eignast stúlku eins og drengi. Í öllum löndum fæðast venjulega nokkru fleiri drengir en stúlkur. Í Noregi fæðast milli 103 og 108 drengir á móti hverjum 100 stúlkum. Tölfræði fyrir árin 1866-2008 segir að hlutfallið hafi verið 51,4% drengir og 48,6% stúlkur. Að auki eru meiri líkur á að eignast stúlku ef fyrsta barn hefur verið stúlka. Myndritið sýnir hvernig það breytist eftir því sem fólk eignast fleiri börn. Það er ekkert sem bendir til þess að þetta sé öðruvísi á Íslandi. Samkvæmt tölum frá Hagstofunni fyrir árið 2015 fæddust 1054 drengir á móti 1000 stúlkum eða 51,3% drengir og 48,7% stúlkur.



Ýmis verkefni - Þrjú einföld spil fyrir tvo

Hægt væri að setja vinnuna upp á þremur stöðum þar sem nemendur fara á milli spilanna þriggja. Þá þarf minni búnað og nemendur geta þá hreyft sig á meðan þeir eru að skipta um spil. Spilin eru kynning á þemanu réttlát og óréttlát spil. Áður en nemendur fara að spila ættu þeir að ræða hvað þeir haldi um útkomurnar.

Þeir lesa spilareglurnar og færa rök fyrir því hvor þeirra þeir haldi að muni vinna. Áður en nemendur byrja að spila setur kennari upp þrjár niðurstöðutöflur á töfluna fyrir hvert spilanna þriggja. Þar geta allir skráð niðurstöður sínar eftir hvert spil. Töflurnar verða undirstöðugögn undir umræður eftir á um niðurstöður í hverju einstöku spili.

- *Eru spilin réttlát eða ekki?*

1 Spil með spilastokk		2 Spil með peningi		3 Spil með teningi	
A vinnur	B vinnur	A vinnur	B vinnur	A vinnur	B vinnur

Öll spilin eru fyrir tvo leikmenn. Ef fjöldi nemenda er oddatala verður einn hópurinn að vera þrír nemendur og skiptast á um að spila hver við annan. Spilin eru rædd í verkefni 5.38 á bls. 71.

Grundvallarfærni

Það að nemendur þurfa að velja mismunandi myndrit eftir aðstæðum gerir það að verkum að nemendur þróa með sér skriflega færni til að framkvæma einfalda líkindareikninga. Spilin örva nemendur til munnlegrar færni með því að koma orðum að hugsunum sínum um hvers vegna annar leikmaðurinn eigi meiri möguleika á að vinna.

Einfaldari verkefni

Það að æfa sig að lesa og túlka og gera sjálf(ur) Vennmynd, krosstöflu og líkindatré getur skýrt aðstæður sem erfitt er að hafa yfirsýn yfir. Kennari kennir nemendum að nýta sér þessar aðferðir við vinnuna við líkindareikning þannig að þeir eigi auðveldara með að fá yfirsýn yfir aðstæðurnar.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Virkt val - satt eða ósatt

Viðfangsefni fyrir allan bekkinn. Kennari les upp staðhæfingar fyrir

bekkinn. Nemendur eiga að sýna á virkan hátt hvort þeir haldi að staðhæfingin sé sönn og allir eru með. Kennari metur út frá bekknum hvort nemendur eigi að svara til dæmis með því að standa upp og ganga á einhvern tiltekinn stað ef staðhæfing er sönn eða með því að sitja kyrrir í sæti sínu og sýna grænt spjald ef þeir telja að staðhæfingin sé sönn. Hægt er að nota opið rými þar sem allir nemendur eru samankomnir í miðju þess. Þeir sýna þá afstöðu sína með því að ganga til hægri eða vinstri. Þeir sem eru ekki vissir verða þá áfram í miðjunni. Svo má spyrja nemendur hvers vegna þeir hafi valið að standa þar sem þeir eru. Þá fá nemendur tækifæri til að færa rök fyrir vali sínu. Nemendur mega líka breyta um afstöðu á meðan á umræðunni stendur. Breyta má til með því að nemendur ræði saman tvö og tvö áður en þeir ákveða endanlega hvort þeir telji að staðhæfingin sé rétt eða ekki.

Hugmyndir að staðhæfingum:

A	Ég kastaði teningi fimm sinnum án þess að fá sexu, þá mun ég fá sexu í næsta kasti.	ósatt
B	Fyrir þá sem eignast tvö börn þá eru jafn miklar líkur á að eignast tvær stúlku og að eignast eina stúlku og einn dreng.	ósatt
C	Pegar þú kastar tveimur teningum þá eru meiri líkur á að summan verði sjö en sex.	satt
D	Ef talan 15 hefur ekki verið dregin út í Lottó síðustu tíu vikur, þá er arðvænlegt að velja 15 á seðilinn sinn.	ósatt
E	Sá sem vinnur stóran vinning í happdrætti ætti ekki að spila aftur því líkurnar á að vinna aftur eru miklu minni.	ósatt
F	Það eru minni líkur á að vinna meira en eina milljón í Lottó tvisvar en einu sinni.	satt
G	Þéð mótspilara þíns í Ludo er fjórum reitum fyrir framan þitt þéð. Líkurnar á að hitta á reit mótspilarans og reka hann heim í næsta kasti er $\frac{1}{4}$.	ósatt það er $\frac{1}{6}$
H	Líkurnar á að fá Yatzy með fimm teningum í einu kasti er jafn miklar og líkurnar á að fá fjóra þrístá í einu kasti með fjórum teningum.	satt

Nemendur mættu einnig spreyta sig á að búa til staðhæfingar og koma með tillögur um hvort þær eru sannar eða ósannar. Staðhæfingarnar má svo leggja fyrir bekkjarfélagana.

Faglegt innihald

- Réttlát og óréttlát spil

Búnaður

- Verplar: sex hliða teningar og ef til vill tíu hliða verplar
- Pappi og skæri til að útbúa spurningaspjöld og spilabretti
- Verkefnablað 3.5.6

Blaðsíða 70–71

Æfingahefti

5.35, 5.36

5.52, 5.33

5.70

Ábendingar

Ýmis verkefni - Þorir þú að taka áhættu?

Við skoðum spil með sex hliða teningi. Við hugsum okkur að við fáum fyrst upp 3. Þá eru $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ líkur á að fá rétt ef við giskum „upp“ og $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ líkur á að fá rétt ef við giskum „niður“. Ástæðan fyrir því að möguleikarnir eru ekki alls sex er sú að við fáum rétt þegar upp kemur sama og í kastinu á undan hvort sem við segjum „upp“ eða „niður“.

Sá sem tapar getur fengið hálf stig ef hann hefur haft oddafjölda teningakasta. Stigin eru talin saman þegar báðir leikmenn hafa leikið eins margar umferðir og ákveðið var í upphafi eða þegar annar leikmaðurinn er kominn upp fyrir tiltekið mark (til dæmis 30 stig).

5.38

Umræðan frá spilunum á bls. 69 heldur áfram.

1 Spil með spilastokk

$$P(r + r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ og } P(s + s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Alls verða líkur á að draga tvö spil í sama lit $\frac{1}{3}$.

$$P(r + s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ og } P(s + r) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Alls verða líkur á að draga tvö spil í mismunandi lit $\frac{2}{3}$. Það er sem sagt tvöfaldar líkur á að A vinni spilið.

2 Spil með peningi

$$P(f + k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ og}$$

$$P(k + f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Alls verða líkurnar á að fá fisk og krónu $\frac{1}{2}$.

$$P(f + f) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ og}$$

$$P(k + k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Alls verða líkurnar á að fá tvo fiska eða tvær krónur $\frac{1}{2}$. Það er sem sagt jafn líklegt að A vinni spilið og að B geri það.

3 Spil með tveimur teningum

$$P(\text{tvær eins tölur}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{tvær mismunandi tölur}) =$$

$$\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

Lögmál stórra talna segir okkur að þegar tímar líða fram munum við vinna í 1/6 skiptanna og tapa í 5/6 skiptanna. Það þýðir að við vinnum þrjá spilapeninga fyrir hvert skipti sem við höfum tapað fimm spilapeningum og til lengdar verður spilið ekki réttlátt. Bankinn mun vinna. Þetta er líka lögmálið að baki mikils hagnaðar spilavíta. Það getur borgað sig að greiða út stóran vinning inn á milli af því að summan af öllu sem kemur inn frá þeim sem tapa er svo miklu hærri en vinningarnir sem þarf að greiða út. Ef spilið ætti að vera réttlátt verða reglurnar að gera ráð fyrir jafn miklu í vinninga og tap þegar til lengdar lætur. Ef leikmaðurinn fær fimm spilapeninga frá bankanum í hvert skipti sem hann vinnur þá jafnast spilið.

5.39–5.40

Nemendur ættu að setja upp töflu sem sýnir líkurnar á að vinna í hverju tilviki eða nota verkefnablað 3.5.6. Á þessu verkefnablaði eru líka tillögur að lausnum með yfirliti yfir líkur í spili með sex hliða teningi og spili með tíu hliða verpli.

5.41

... þrjár karamellur frá þér.

5.42

Hvetja ætti nemendur til að spyrja um skýringar á orðum og hugtökum, spyrja spurninga um líkur sem varða námsmarkmiðin í þessum kafla (Sjá *Í stuttu máli*, bls. 72–73 um hugmyndir).

Grundvallarfærni

Í þessari opnu er gott að vinna mikið með munnlega færni. Þá er mikilvægt að setja fram eigin skýringar og rök og hlusta á skoðanir annarra og rök.

Einfaldari verkefni

Nemendur ættu að fylla út töflu til að hugleiða líkur á að vinna í spilinu *Þorir þú að taka áhættu?* Þá má nota tómar töflu á verkefnablaði 3.5.6.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Líkurnar á að vinna í Jóker

Sjá Lýsingu á bls. 42 í kennarabók.



Í stuttu máli

Blaðsíða 72–73

Ábendingar

Vinna má með samandregin námsmarkmið, sýnidæmi og tillögur að lausnum í kaflanum *Í stuttu máli* á mismunandi vegu. Kennari lætur nemendur lesa yfir hvert námsmarkmið tengt sýnidæmi og tillögu að lausn. Þeir ræða hugtök og skrá hjá sér hvort það sé eitthvað sem þeim finnst vera erfitt eða langar til að vinna meira með í kaflanum *Bættu þig!*

Dregin eru fram eldri sjálfsmatseyðublöð sem nemendur hafa unnið að í kaflanum. Nemendur ættu nú að mynda sér skoðun á stöðu sinni með tilliti til námsmarkmiða kaflans. Það getur hjálpað þeim að skipuleggja vinnuna í síðasta hluta kaflans.

Hér er möguleiki á að leggja fyrir áfangapróf til að kortleggja hvaða færni nemendur hafa til að bera eftir að hafa unnið um tíma með 5. kafla í *Skala 3B*.

Niðurstöðurnar sýna fram á hverju hver og einn nemandi hefur náð valdi og að hverju þeir þurfa að vinna betur í kafla 5. Prófið er ekki ætlað til að gefa einkunn fyrir. Niðurstöðurnar geta gefið vísbendingu um hvernig eigi að fara með síðasta hluta kaflans. Ef það eru tiltekin svið sem þarf að veita meiri athygli í vinnunni framundan er hægt að velja verkefni úr blaðsíðunum *Bættu þig!* í kafla 5.

Endurgjöf til nemenda eftir áfangaprófið felur í sér góð ráð um hvað þeir geta gert til að ná markmiðum kaflans. Þeir geta sjálfir valið um frekari vinnu í *Bættu þig!*-síðunum eða önnur verkefni út frá niðurstöðum úr áfangaprófinu.



Bættu þig!

Blaðsíða 74–75

Ábendingar

Nemendur eiga að velja út frá niðurstöðum á áfangaprófinu verkefni sem við eiga til að ná námsmarkmiðunum. Áætlun er gerð með nemendum um hvað þeir þurfi að vinna sérstaklega með. Einnig væri hægt að láta hvern nemanda gera sína vinnuáætlun og skilgreina að hvaða markmiðum þeir þurfi sérstaklega að vinna.

Á þessari opnu eru blönduð verkefni um líkur á fleiri en einum atburði samtímis, líkur þegar dregið er með og án skila, líkur þegar um andstæða atburði er að ræða og greining á spilum.

5.43

Nemendur gætu líka útbúið hermun með því að nota miða. Skrifid D (fyrir drengur) á 18 miða og S (fyrir stúlka) á 12 miða og setjið í krukku.

5.44

Ef ekki er gangbraut með umferðarljósum í nágrenninu mætti ef til vill stilla sér upp fyrir framan kennarastofuna og skrá hvort næsti kennari eða starfsmaður býður góðan dag eða ekki þegar hann gengur fram hjá.

Afbrigði: Stillið ykkur upp framan við hverfisbúðina og skráið hvort þeir sem koma út úr búðinni séu með fleiri en einn poka með vörum.

5.45

Líkurnar á að spáin standist liggur

á milli $\frac{1}{1} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{20}$, þ.e.a.s.

35% líklegt, og $\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{1} = 0$,

þ.e.a.s. 0% líklegt.

5.46, 5.48–5.49

Verkefnin eru um hermun. Nemendur gætu stungið upp á fleiri mögulegum leiðum til að herma en bent er á í verkefninu. Þegar margar mismun-

andi leiðir til að leysa þraut standa til boða hvetur það nemendur til að velja hentugustu aðferðina. Með töflureikni er hægt að herma eftir mörgum tilraunum á mjög stuttum tíma. Þannig er hægt að fá niðurstöður sem nálgast fræðilegar líkur.

Erfðari verkefni – Ýmis verkefni

Lúðó-spil - Bæjarferð

Búnaður: Spilaborð (verkefnablað 3.5.4), peð eða kubbar og 10-verpill Fjórir - fimm þáttakendur (ef færri eru í hópnun verða allir að bíða eftir öllum aðeins of oft)

Spilið er einföld hermun á bæjarferð. Áður en nemendur byrja verða þeir að koma sér saman um hvaða gildi á verplinum eigi að merkja hvað. Allir hafa það sem er sett á byrjunarpunktinn. Spilið um hver eigi að byrja og haldið reglu á umferðunum. Fyrsti reitur er strætóferðin. Nemandi setur sitt peð í reitinn, kastar teningnum og athugar hvað gerist. Hann lætur peðið standa á reitnum þar til hann/hún hefur hefur beðið eins lengi og mælt er fyrir um. Nemendur gætu gjarnan búið til eigið afbrigði af spilinu með fleiri og öðrum stoppum og raunhæfum prósentutölum.

Spilið má greina nánar samkvæmt þemanu „samsettir atburðir“.

Nemendur eru spurðir:

- Hve miklar líkur eru á að leikmaður noti stysta mögulegan tíma?
- Hve miklar líkur eru á að leikmaður noti lengsta mögulega tíma?
- Hve miklar líkur eru á að leikmaður fari bæði á safn og á bío en borði ekki á veitingahúsi?

Nemendur geta búið til svipuð verkefni hver fyrir aðra.

Stærðfræðiorðalistar

Kennari lætur nemendur vinna saman tvo og tvo við búa til stærðfræðiorðalista fyrir kaflann. Hann getur orðið stuðningur við upprifjun á þemum kaflans. Gott er að skrifa orðin upp í tölvu með skýringum, stækka þau og hengja upp sem veggspjald í kennslustofunni. Nemendur geta kynnt orðalistana hver fyrir öðrum.



Blaðsíða 76–77

Ábendingar

5.50

Hér eru skilyrðin tvö óháð hvort öðru. Við þurfum að finna líkur á andstæðu atburðunum við að það rigni og við að foreldrarnir segi nei.

5.51

Spurning sem fylgir þessu eftir getur verið:

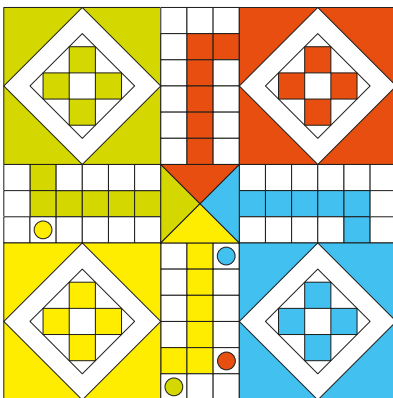
- Ef líkur á rigningardegi eru 0,9, hve margir þurrviðris dagar voru þá í september 2011?

5.52

Hér er annar dráttur háður fyrsta drætti.

5.53

Nemendur ætti að nota raunverulegt Lúdó-leikborð til að sjá aðstæðurnar fyrir sér. Hér eru aðstæðurnar í a-lið þannig að rautt peð er fjórum skrefum framan við blátt peð. Við getum líka séð stöðuna í b-lið með því að hafa grænt peð tíu skrefum aftan við gult peð.



5.55

Til fróðleiks má nefna að hafi krabbi eða humar farið fyrst inn í gildruna kemur annar humar sjaldan inn. Krabbar geta komið í humargildru en krabbi tekur ferskt agn gagnstætt humrinum sem kýs heldur rotið agn (af dýri eða fiski). Mikilvægt er að

halda krabbanum frá. Ef krabbi er kominn inn í gildruna vill humarinn sjaldnast fara inn þar sem hann vill halda sig frá hugsanlegum átökum.

5.56

Ein aðferð gæti verið að teikna bláar og gular kúlur og prófa sig síðan áfram með líkurnar á kúlunum í verkefninu.

5.58

P (tvær manneskjur eiga sama afmælisdag) = $1 - P$ (tvær manneskjur eiga ekki sama afmælisdag).

Um er að velja 364 afmælisdaga svo að líkurnar á að tvær manneskjur eigi mismunandi afmælisdaga eru $\frac{364}{365}$. Það lætur 363 daga af 365 eftir fyrir þriðju manneskjuna.

Til að finna líkur á að bæði önnur manneskjan og sú þriðja eigi mismunandi afmælisdaga þarf að margfalda $\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} = \frac{132132}{133225}$, sem eru um það bil 99,18 %.

Ef við viljum vita hvort fjórar manneskur eigi mismunandi afmælisdaga er enn margfaldað

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} = \frac{47831784}{48627125}$$

eða um það bil 98,36 %.

Þannig má halda áfram eins lengi og við viljum. Formúlan fyrir líkunum á að n manns eigi mismunandi afmælisdaga er

$$\frac{365-1}{365} \cdot \frac{365-2}{365} \cdot \frac{365-3}{365} \cdot \dots \cdot \frac{365-n+1}{365}$$

Við vitum að P (tvær manneskjur eiga sama afmælisdag) = $1 - P$ (tvær manneskjur eiga ekki sama afmælisdag) og við vitum hvernig á að finna líkur á að margar manneskjur eigi allar mismunandi afmælisdaga. Einfaldasta leiðin til að finna réttu bekkjarstærðina er að nota reiknivél eða töflureikni til að prófa mismun-

andi tölur í formúlunni. Það kemur í ljós að minnsti bekkurinn þar sem líkur á að finna tvær manneskjur með sama afmælisdag eru meiri en 50% er 23 manna bekkur. (Líkurnar eru um 50,73%).

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Veggspjald til námsstuðnings

Kennari getur látið nemendur vinna saman tvo og tvo við að útbúa veggspjald til stuðnings við að læra tiltekið þema, svo sem: Líkur byggðar á tilraunum og hermum; líkur á fleiri en einum atburði, með eða án skila; líkur á andstæðum atburðum eða greining á líkum í spilum. Veggspjöldin eru hengd upp í kennslustofunni og nemendur kynna þau hver fyrir öðrum.



Blaðsíða 78–79

Ábendingar

5.62

a Hér er ekki um jafnar líkur að ræða:

	1	2	3	4
1		$1 + 2 = 3$	$1 + 3 = 4$	$1 + 4 = 5$
2	$2 + 1 = 3$		$2 + 3 = 5$	$2 + 4 = 6$
3	$3 + 1 = 4$	$3 + 2 = 5$		$3 + 4 = 7$
4	$4 + 1 = 5$	$4 + 2 = 6$	$4 + 3 = 7$	

Taflan sýnir að það eru átta möguleikar á að summan sé oddatala og fjórir möguleikar á að summan sé slétt tala. Þá eru líkur á oddatölu $\frac{2}{3}$ og á slétttri tölu $\frac{1}{3}$.

b Ef slétttri tölu er skipt út með oddatölu verða líkurnar jafnar (hér er 4 skipt út með 5):

	1	2	3	5
1		$1 + 2 = 3$	$1 + 3 = 4$	$1 + 5 = 6$
2	$2 + 1 = 3$		$2 + 3 = 5$	$2 + 5 = 7$
3	$3 + 1 = 4$	$3 + 2 = 5$		$3 + 5 = 8$
5	$5 + 1 = 6$	$5 + 2 = 7$	$5 + 3 = 8$	

Nú eru líkurnar á að summan verði oddatala nákvæmlega jafnmiklar og að hún verði oddatala: $\frac{1}{2}$.

5.65

Hér þurfa nemendur að vita að það eru tólf mannsþil í spilastokk.

Erfiðari verkefni – Ýmis verkefni

Líkurnar á að vinna í Jóker

Spilið *Þorir þú að taka áhættu?* á bls. 70 líkist spílinu Jóker, sem nemendur þekkja kannski áður. Sem aðalvinningshafinn í Jóker-spílinu færð þú úthlutað fimm tölum frá 0 til 9, valdar af handahófi. Fyrir hverja þeirra áttu að velja hvort þú heldir að fimm aðrar tölur séu hærri eða lægri en þín tala. Ef þú velur rétt klífur þú upp vinningsstigann. Ef þú velur rangt færir þú niður. Að auki er jóker í spílinu svo að það eru ellefu mögulegir „tölustafir“ sem geta falist á bak við leynilegu tölurnar.

Gerið kennslumyndband

Kennari getur látið nemendur, tvo og tvo, gera saman kennslumyndband, gjarnan fyrir sjónvarp, sem gæti stutt við námið á tilteknu þema í kaflanum. Deilið aðgangi að myndböndunum og horfið gjarnan á þau saman.

Hvað viltu velja?

Notið spjöldin á verkefnablaði 3.5.3. Þetta verkefni hentar til upprifjunar á líkindahugtakinu og er unnið út frá því sem nemendur eiga að hafa lært í vinnunni í *Skala 2B*, kafla 5. Notið spjöldin á verkefnablaði 3.5.3. Klippið þau í sundur og blandið þeim vel saman. Nemendur vinna saman, tveir og tveir. Þeir draga tvö spjöld og ræða hvaða spjald gefur þeim mestar líkur eða hvort þau hafi sama gildi. Þeir geta líka unnið með öll spjöldin í einu og raðað þeim frá minnstu upp í mestar líkur. Jafngild spjöld eru lögð hvert ofan á annað. Einnig mætti hvetja nemendur til að lýsa útkomumenginu og ákveða hvort um atburðinn gildi jafnar eða ójafnar líkur.



Þjálfaðu hugann

Blaðsíða 80–81

Ábendingar

5.67

Verkefnið hentar mjög vel til að vinna með raunverulegar kúlur eða þá að teikna þær.

5.68

Raðað frá minnstu líkum til mestu:

- P (fá fjarka tvisvar í röð)

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 2,8\%$$

- P (fá að minnsta kosti eitt fúlegg af hundrað eggjum þegar líkur á fúleggi er 0,2%) = 18,1%

- P (grænt gangbrautarljós sem er rautt 60% tímans)

$$= \frac{2}{5} = 40\%$$

- P (draga spaða minnst einu sinni af þremur skiptum) = 57,8%

5.69

Aðstæðurnar sem lýst er í texta verkefnisins eru þekktar sem „þversögn lágu talnanna“.

Við getum sett aðstæðurnar upp í krosstöflu og reiknað út líkur á hverri af samsetningunum fjórum.

	A	B	C	D
1	Krosstafla fyrir tvo atburði: sjúkdóm/ekki sjúkdóm og satt/ósatt próf			
2				
3			$P(\text{hefur sjúkdóm})$	$P(\text{hefur ekki sjúkdóm})$
4			0,003	0,997
5	$P(\text{satt próf})$	0,992	0,002976	0,989024
6	$P(\text{ósatt próf})$	0,008	0,000024	0,007976

Við sjáum að sá sem fær skilaboðin skelfilegu, hér merkt með gráu svæði í töflureikninum, hefur satt að segja meiri líkur á að vera heilbrigður. Niðurstaðan sýnir að slík próf verða að vera mjög örugg til að hægt sé að setja þau á markað. Meiri líkur verða að vera á að sýna rétta niðurstöðu en líkurnar eru á að vera heilbrigður. Oft spila siðferðileg álitamál inn í hjá lækningafyrirtækjum þegar taka þarf ákvarðanir innan þessa sviðs.

5.70

Þetta er svolítið skapandi afbrigði af kúabingó þar sem svæðin eru ekki jafn stór.

a Hægt er að útbúa þetta líkan á marga vegu. Aðalatriðið er að fjöldi spila þarf að vera deilinglegur með 8 og skiptast í helminga, fjórðuhluta og áttundu hluta. Tillaga:

Takið burtu alla ása þannig að við höfum 48 spil.

A: allir spaðar frá 2 til 7

B: allir spaðar frá 8 til 13

C: öll laufspil

D: öll rauð spil

Stokkið spilin og dragið eitt spil fyrir hverja kú. Dregið er með skilum.

b Nemendur fá gjarnan spilapeninga sem veðfé til að leggja undir og prófa sig áfram með hvernig veðféð og vinningar skiptast. Í tillögunni gerum við ráð fyrir að veðféð sé alltaf jafnmikið, óháð reit, en að vinningsupphæðin verði þeim mun stærri sem reiturinn er minni.

Veðfé: tveir spilapeningar óháð reit

Skipting vinninga:

75% = sex peningar á spil

Vinningur í A: tólf peningar (vinningshlutfall: 6,0)

Vinningur í B: tólf peningar (vinningshlutfall: 6,0)

Vinningur í C: sex peningar (vinningshlutfall: 3,0)

Vinningur í D: þrjú peningar (vinningshlutfall: 1,5)

Hugtakið „vinningshlutfall“ hefur svolítið mismunandi skilgreiningar en hér má skilgreina það sem þáttinn sem veðféð er margfaldað með til að reikna út vinninginn þegar vinningur fæst.

c Nota má spilaspjaldið fyrir kúabingó á verkefnablaði 3.5.7.

Kaflapróf

Nú geta nemendur tekið kaflaprófið. Kaflaprófið er metið með einkunn. Einkunnin og endurgjöfin eru hér hluti af leiðsagnarmati um stöðu nemenda í þemanu.